

Limites de fonctions

Corrigé du contrôle - Terminale

Durée conseillée : 45 minutes. Barème sur 20 points. Calculatrice interdite.

1 Lecture graphique / 3 pts

- La courbe se rapproche de la hauteur -1 aux deux extrémités : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -1$. (1 pt)
- À droite de -2 la courbe monte : $\lim_{x \rightarrow -2^+} g(x) = +\infty$; à gauche elle descend : $\lim_{x \rightarrow -2^-} g(x) = -\infty$. (1 pt)
- Asymptote horizontale $y = -1$ et asymptote verticale $x = -2$. (1 pt)

2 Limites en l'infini / 4 pts

- $-3x^3 + 2x^2 - 1 = x^3(-3 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^3})$: la parenthèse tend vers -3 , $x^3 \rightarrow +\infty$, donc la limite est $-\infty$. (1 pt)
- $5x - x^2 = x^2(\frac{5}{x} - 1)$: en $-\infty$, $x^2 \rightarrow +\infty$ et la parenthèse tend vers -1 , donc la limite est $-\infty$. (1 pt)
- Termes dominants : $\frac{4x^2}{2x^2} = 2$. La limite est 2 . (1 pt)
- Termes dominants : $\frac{3x}{x^2} = \frac{3}{x} \rightarrow 0$. La limite est 0 . (1 pt)

3 Asymptotes d'une fraction / 4 pts

- $x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2)$: f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2 ; 3\}$. (1 pt)
- Termes dominants : $\frac{3x}{x^2} = \frac{3}{x} \rightarrow 0$. Donc $\lim f = 0$ en $+\infty$ et en $-\infty$. (1 pt)
- En 3 : numérateur $\rightarrow 7 > 0$, $x + 2 \rightarrow 5 > 0$, $x - 3 \rightarrow 0^+$ ou 0^- : $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty$. (0,75 pt)

En -2 : numérateur $\rightarrow -8 < 0$, $x - 3 \rightarrow -5 < 0$, $x + 2 \rightarrow 0^+$ ou 0^- : le dénominateur tend vers 0^- à droite et 0^+ à gauche, donc $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty$. (0,75 pt)
- Asymptotes verticales $x = -2$ et $x = 3$; asymptote horizontale $y = 0$. (0,5 pt)

4 Formes indéterminées / 3 pts

- Forme $0/0$. $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$ et $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$. Pour $x \neq 2$ le quotient vaut $\frac{x+2}{x-1}$, qui tend vers $\frac{4}{1} = 4$. (1 pt)
- Forme $+\infty - \infty$. On multiplie par le conjugué : $\sqrt{x^2+3x} - x = \frac{3x}{\sqrt{x^2+3x} + x}$ (1

pt). Pour $x > 0$, on divise en haut et en bas par x : $3 / (\sqrt{1 + 3/x} + 1)$, qui tend vers $3/2$ car $3/x \rightarrow 0$. La limite est $3/2$. (1 pt)

5 Comparaison / 3 pts

- a. Comme $\cos x \geq -1$, on a $x + 3 \cos x \geq x - 3$ (0,5 pt). Or $x - 3 \rightarrow +\infty$: par minoration, la limite est $+\infty$. (0,5 pt)
- b. Pour $x \neq 0$: $1 \leq 2 + \sin x \leq 3$, donc $1/x^2 \leq 2 + \sin x/x^2 \leq 3/x^2$ (1 pt). Les deux bornes tendent vers 0 : d'après le théorème des gendarmes, la limite est 0. (1 pt)

6 Croissances comparées / 3 pts

- a. Croissance comparée : la limite est $+\infty$. (1 pt)
- b. Forme $+\infty - \infty$: $x - e^x = e^x(x/e^x - 1)$. Comme $x/e^x \rightarrow 0$, la parenthèse tend vers -1 et $e^x \rightarrow +\infty$: la limite est $-\infty$. (1 pt)
- c. $1 + e^x \rightarrow +\infty$, donc $1/(1+e^x) \rightarrow 0$: la limite est 0. (1 pt)