

Limites de fonctions

Corrigé des exercices - Terminale

Corrigé détaillé des exercices du chapitre. Vérifie tes réponses étape par étape et corrige-toi.

1 Limites de référence ★★★

- a. $-\infty$ (puissance impaire).
- b. $+\infty$.
- c. 0.
- d. $+\infty$ (dénominateur positif proche de 0).
- e. $-\infty$ (dénominateur négatif proche de 0).
- f. 0.

2 Vrai ou faux ? ★★★

- a. **Faux.** $f(x) = -1/x$ tend vers 0 en $+\infty$ mais reste négative sur $]0 ; +\infty[$.
- b. **Faux.** Prenons $f(x) = x + 2 \sin x$: on a $f(x) \geq x - 2$ donc f tend vers $+\infty$, mais $f(\pi/2) = \pi/2 + 2 \approx 3,57$ et $f(3\pi/2) = 3\pi/2 - 2 \approx 2,71$: f diminue entre ces deux valeurs.
- c. **Vrai.** $\lim_{x \rightarrow 0^+} 1/x^2 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} 1/x^2 = +\infty$, donc la droite $x = 0$ est asymptote verticale.
- d. **Faux.** $x^2 - x^2 = 0$ pour tout x , donc la limite existe et vaut 0. $+\infty - \infty$ est une forme indéterminée, ce qui n'empêche pas la limite d'exister.

3 Opérations simples ★★★

- a. $\sqrt{x} \rightarrow +\infty$ et 5 est constant : la limite est $+\infty$.
- b. $1/x \rightarrow 0$, donc $3 - 1/x \rightarrow 3$.
- c. $x^3 \rightarrow -\infty$: la limite est $-\infty$.
- d. $1/x \rightarrow +\infty$ en 0^+ : la limite est $+\infty$.
- e. Produit de deux quantités qui tendent vers $+\infty$: $+\infty$.
- f. $x^2 \rightarrow +\infty$ et $1/x \rightarrow 0$: la limite est $+\infty$.

4 Lecture graphique ★★★

- a. Quand x devient très grand ou très négatif, la courbe se rapproche de la hauteur 2 : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$.
- b. À droite de 2, la courbe monte vers le haut : $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$; à gauche de 2, elle

descend : $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$.

- c. La droite $y = 2$ est asymptote horizontale (question a) et la droite $x = 2$ est asymptote verticale (question b).

5 Asymptotes d'une courbe ★★★

- a. $2/x+4 \rightarrow 0$ en $\pm\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$: la droite $y = 3$ est asymptote horizontale.
- b. En -4^+ , $x + 4 \rightarrow 0^+$ donc $2/x+4 \rightarrow +\infty$ et $f(x) \rightarrow +\infty$. En -4^- , $x + 4 \rightarrow 0^-$ donc $f(x) \rightarrow -\infty$. La droite $x = -4$ est asymptote verticale.
- c. $f(x) - 3 = 2/x+4$ est positif si $x > -4$ et négatif si $x < -4$: la courbe est au-dessus de $y = 3$ sur $] -4 ; +\infty[$ et au-dessous sur $] -\infty ; -4[$.

6 Quotient et signe du dénominateur ★★★

- a. $x - 3 \rightarrow 0^+ : +\infty$.
- b. $x - 3 \rightarrow 0^- : -\infty$.
- c. $x + 2 \rightarrow 0^+$ et $5 > 0 : +\infty$.
- d. $x^2 \rightarrow 0^+$ (un carré est positif) et $-2 < 0 : -\infty$.
- e. Si $x > 4$, $4 - x < 0 : 4 - x \rightarrow 0^-$; avec $3 > 0$, la limite est $-\infty$.

7 Coût moyen de fabrication ★★★

- a. $C(q) = 2q/q + 300/q = 2 + 300/q$.
- b. $300/q \rightarrow 0$ donc $\lim_{q \rightarrow +\infty} C(q) = 2$. Le coût moyen se rapproche de 2 euros par objet quand la production devient très grande ; il reste toujours supérieur à 2 car $300/q > 0$.
- c. $300/q \rightarrow +\infty$ donc $\lim_{q \rightarrow 0^+} C(q) = +\infty$: fabriquer très peu d'objets rend chacun très coûteux (les frais fixes de 300 euros sont partagés entre peu d'objets).
- d. $C(q) \leq 2,5 \Leftrightarrow 300/q \leq 0,5 \Leftrightarrow q \geq 300/0,5 = 600$ (on multiplie par $q > 0$ puis on divise par 0,5). Il faut produire **au moins 600 objets par jour**.

8 Polynômes en l'infini ★★★

- a. $x^3 - 5x^2 + 2 = x^3(1 - 5/x + 2/x^3)$. La parenthèse tend vers 1 et $x^3 \rightarrow +\infty$: la limite est $+\infty$.
- b. $-2x^4 + x^3 = x^4(-2 + 1/x)$. En $-\infty$, $x^4 \rightarrow +\infty$ et la parenthèse tend vers -2 : la limite est $-\infty$.
- c. $x - x^2 = x^2(1/x - 1)$ avec $x^2 \rightarrow +\infty$ et la parenthèse $\rightarrow -1$: la limite est $-\infty$.
- d. $4x^3 - x = x^3(4 - 1/x^2)$ avec $x^3 \rightarrow -\infty$ et la parenthèse $\rightarrow 4$: la limite est $-\infty$.

9 Fractions rationnelles en l'infini ★★★

- a. On garde les termes de plus haut degré : $3x^2/x^2 = 3$. Donc $\lim f = 3$ en $+\infty$ et en $-\infty$.
- b. Termes dominants : $2x/x^2 = 2/x \rightarrow 0$. Donc $\lim g = 0$ en $\pm\infty$.
- c. Termes dominants : $x^3/2x^2 = x/2$. En $+\infty$: $+\infty$; en $-\infty$: $-\infty$.
- d. Termes dominants : $5x/-x = -5$. Donc $\lim k = -5$ en $\pm\infty$.

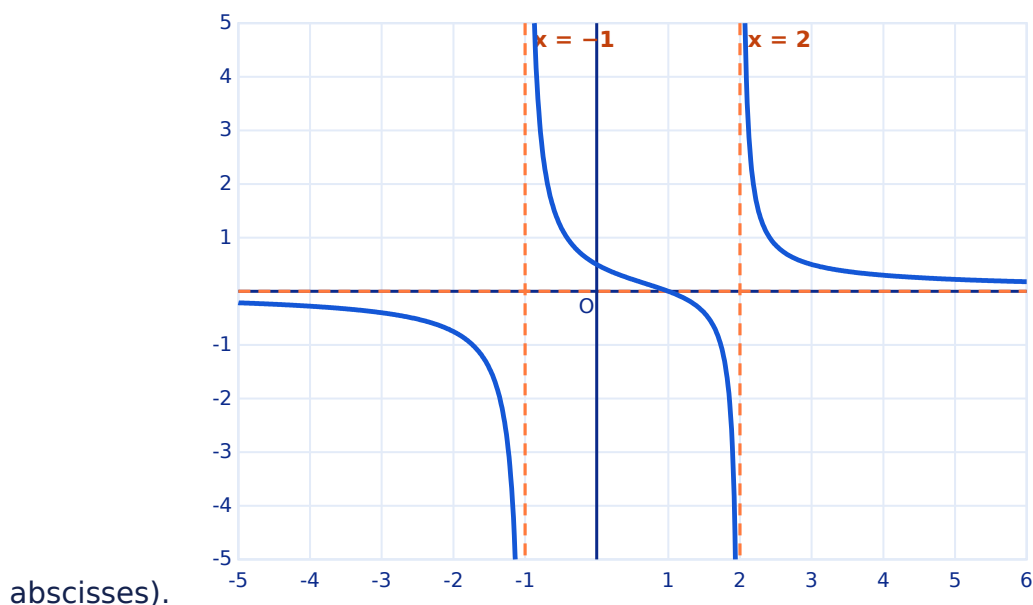
10 Formes 0/0 ★★★

- a. Forme **0/0**. Pour $x \neq 3$: $x^2-9/x-3 = (x-3)(x+3)/x-3 = x+3$. La limite vaut 6.
- b. Forme **0/0**. $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$, donc pour $x \neq 2$ le quotient vaut $x-3$. La limite vaut -1 .
- c. Forme **0/0**. Pour $x \neq 0$: $x^2-x/x = x-1$. La limite vaut -1 .
- d. Ici le numérateur tend vers 3 (pas 0). Le dénominateur est $(x-2)^2$, positif et qui tend vers 0^+ des deux côtés. La limite est donc $+\infty$ (ce n'est pas une forme indéterminée).

11 Deux asymptotes verticales ★★★

- a. $x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$ (racines 2 et -1). f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1; 2\}$.
- b. Termes dominants : $x/x^2 = 1/x \rightarrow 0$. Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.
- c. En 2 : le numérateur tend vers $1 > 0$; $(x+1) \rightarrow 3 > 0$, et $(x-2) \rightarrow 0^+$ à droite, 0^- à gauche. Donc $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$.

En -1 : le numérateur tend vers $-2 < 0$; $(x-2) \rightarrow -3 < 0$ et $(x+1) \rightarrow 0^+$ à droite, 0^- à gauche, donc le dénominateur tend vers 0^- à droite et 0^+ à gauche. Donc $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty$.
- d. Asymptotes verticales : $x = -1$ et $x = 2$; asymptote horizontale : $y = 0$ (l'axe des



12 Quantité conjuguée ★★★

- a. Forme $+\infty - \infty$. On multiplie par le conjugué : $\sqrt{x+3} - \sqrt{x} = \frac{(x+3) - x}{\sqrt{x+3} + \sqrt{x}} = \frac{3}{\sqrt{x+3} + \sqrt{x}}$. Le dénominateur tend vers $+\infty$, la limite est 0.
- b. $\sqrt{x^2+1} - x = \frac{(x^2+1) - x^2}{\sqrt{x^2+1} + x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x} \rightarrow 0$.
- c. $\sqrt{x} - x = \sqrt{x}(1 - \sqrt{x})$ avec $\sqrt{x} \rightarrow +\infty$ et $1 - \sqrt{x} \rightarrow -\infty$: la limite est $-\infty$ (produit de $+\infty$ par $-\infty$).
- d. On multiplie par le conjugué : $\sqrt{x^2+1} + x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1} - x}$. Quand $x \rightarrow -\infty$, $-x \rightarrow +\infty$ et $\sqrt{x^2+1} \rightarrow +\infty$, donc le dénominateur tend vers $+\infty$: la limite est 0.

13 Composition ★★★

- a. $x^2 + 1 \rightarrow +\infty$ et $\sqrt{x} \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow +\infty$: la limite est $+\infty$.
- b. $1 + \frac{2}{x} \rightarrow 1$ et $x^3 \rightarrow 1$ quand $x \rightarrow 1$: la limite est 1.
- c. $\frac{1}{x-2} \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow 2^+$ et $\sqrt{x} \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow +\infty$: la limite est $+\infty$.
- d. $\frac{1}{x} \rightarrow 0$ et $\cos x \rightarrow \cos 0 = 1$ quand $x \rightarrow 0$: la limite est 1.
- e. $x^2 + 1 \rightarrow +\infty$ donc $\sqrt{x^2+1} \rightarrow +\infty$, et $\frac{1}{x} \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$: la limite est 0.

14 Encadrements simples ★★★

- a. Comme $\cos x \geq -1$, on a $x + \cos x \geq x - 1$. Or $x - 1 \rightarrow +\infty$, donc la limite est $+\infty$ (minoration).
- b. Comme $\sin x \leq 1$, on a $-2 \sin x \geq -2$ et donc $3x - 2 \sin x \geq 3x - 2 \rightarrow +\infty$: la limite est $+\infty$.
- c. Comme $\sin x \leq 1$, $-x^2 + 3 \sin x \leq -x^2 + 3$. Or $-x^2 + 3 \rightarrow -\infty$, donc la limite est $-\infty$ (majoration).
- d. Pour $x \neq 0$: $-\frac{1}{x^2} \leq \cos x \leq \frac{1}{x^2}$. Les deux bornes tendent vers 0 : d'après le théorème des gendarmes, la limite est 0.

15 Position par rapport à l'asymptote ★★★

- a. $2 + \frac{1}{x+1} = \frac{2(x+1) + 1}{x+1} = \frac{2x+3}{x+1}$.
- b. $\frac{1}{x+1} \rightarrow 0$ en $\pm\infty$ donc $\lim f = 2$ en $+\infty$ et en $-\infty$. En -1^+ , $x+1 \rightarrow 0^+$ donc $f(x) \rightarrow +\infty$; en -1^- , $f(x) \rightarrow -\infty$.
- c. Asymptotes : $y = 2$ (horizontale) et $x = -1$ (verticale). $f(x) - 2 = \frac{1}{x+1}$: positif pour $x > -1$, négatif pour $x < -1$. La courbe est au-dessus de $y = 2$ sur $]-1 ; +\infty[$ et au-dessous sur $] -\infty ; -1[$. Elle ne coupe jamais cette asymptote car $\frac{1}{x+1} \neq 0$.

16 Trouver des paramètres ★★★

- a. Termes dominants : $\frac{ax}{x} = a$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$. L'asymptote est $y = 3$: $a = 3$.
- b. $f(2) = \frac{6+b}{1} = 6 + b = 7$, donc $b = 1$.
- c. En 1 : le numérateur tend vers $4 > 0$ et $x - 1 \rightarrow 0^+$ à droite, 0^- à gauche : $\lim_{x \rightarrow 1^+}$

$f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$. La droite $x = 1$ est asymptote verticale. Enfin $f(x) - 3 = \frac{3x+1 - 3(x-1)}{x-1} = \frac{4}{x-1}$.

17 Gendarmes ★★★

- Pour $x > 0$: $-1 \leq \sin x \leq 1$, donc $\frac{2x-1}{x+1} \leq \frac{2x+\sin x}{x+1} \leq \frac{2x+1}{x+1}$. Les deux bornes ont pour limite 2 (termes dominants), donc la limite est 2.
- On a $2 \leq 3 + \cos x \leq 4$, donc $\frac{2}{x^2+1} \leq \frac{3+\cos x}{x^2+1} \leq \frac{4}{x^2+1}$. Les bornes tendent vers 0 : la limite est 0.
- Pour $x > 0$: $-x \leq x \cos x \leq x$ donc $-\frac{x}{x^2+1} \leq \frac{x \cos x}{x^2+1} \leq \frac{x}{x^2+1}$. Or $\frac{x}{x^2+1} \leq \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$; ainsi $-\frac{1}{x} \leq \frac{x \cos x}{x^2+1} \leq \frac{1}{x}$. Les deux bornes tendent vers 0 : la limite est 0.

18 Croissances comparées ★★★

- Croissance comparée : $+\infty$.
- $x e^{-x} = \frac{x}{e^x}$ est l'inverse de $\frac{e^x}{x}$, qui tend vers $+\infty$: la limite est 0.
- Croissance comparée : 0.
- Croissance comparée : 0.
- Forme $+\infty - \infty$: $e^x - x^2 = x^2(\frac{e^x}{x^2} - 1)$. La parenthèse tend vers $+\infty$ et $x^2 \rightarrow +\infty$: la limite est $+\infty$.
- On pose $X = -x \rightarrow +\infty$: $x^2 e^x = \frac{X^2}{\exp(X)} \rightarrow 0$. La limite est 0.

19 Une racine et un quotient ★★★

- $f(x) = \frac{(x^2+x) - x^2}{\sqrt{(x^2+x)} + x} = \frac{x}{\sqrt{(x^2+x)} + x}$ (quantité conjuguée).
- Pour $x > 0$, $\sqrt{(x^2+x)} = x \sqrt{(1 + \frac{1}{x})}$. Donc $f(x) = \frac{x}{(x\sqrt{(1 + \frac{1}{x})} + x)} = \frac{1}{(\sqrt{(1 + \frac{1}{x})} + 1)}$. Quand $x \rightarrow +\infty$, $\frac{1}{x} \rightarrow 0$, donc $\sqrt{(1+\frac{1}{x})} \rightarrow 1$ et $f(x) \rightarrow \frac{1}{2}$.
- La droite $y = \frac{1}{2}$ est asymptote horizontale à la courbe de f en $+\infty$.

20 Vitesse limite d'un train ★★★

- $80 - \frac{400}{t+5} = \frac{80(t+5) - 400}{t+5} = \frac{80t}{t+5}$.
- $\frac{400}{t+5} \rightarrow 0$, donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = 80$. C'est la **vitesse limite** : le train s'en rapproche sans la dépasser.
- $\frac{80t}{t+5} = 72 \Leftrightarrow 80t = 72(t+5) \Leftrightarrow 8t = 360 \Leftrightarrow t = 45$. Le train atteint 72 km/h au bout de **45 minutes**.
- $v(t) = 80 \Leftrightarrow \frac{400}{t+5} = 0$, ce qui est impossible car $400 \neq 0$. Le train n'atteint **jamais** 80 km/h : la courbe reste strictement sous son asymptote $y = 80$.

21 Étude complète des asymptotes ★★★

- $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$ s'annule en 2 et -2 : f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2 ; 2\}$.

b. Termes dominants : $2x^2/x^2 = 2$. Donc $\lim f = 2$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

c. Numérateur en 2 : $8 - 2 - 1 = 5 > 0$. Dénominateur $(x-2)(x+2)$ avec $x + 2 \rightarrow 4 > 0$: il tend vers 0^+ à droite de 2 et 0^- à gauche. Donc $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$.

Numérateur en -2 : $8 + 2 - 1 = 9 > 0$. Dénominateur : $x - 2 \rightarrow -4 < 0$ et $x + 2 \rightarrow 0^+$ à droite, 0^- à gauche ; donc il tend vers 0^- à droite de -2 et 0^+ à gauche. Donc $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty$.

d. Asymptotes verticales : $x = -2$ et $x = 2$; asymptote horizontale : $y = 2$.



e. $f(x) - 2 = \frac{2x^2 - x - 1}{x^2 - 4} - 2 = \frac{2x^2 - x - 1 - 2(x^2 - 4)}{x^2 - 4} = \frac{7 - x}{x^2 - 4}$. Le numérateur est positif si $x < 7$; le dénominateur est positif si $x < -2$ ou $x > 2$.

Tableau de signes de $f(x) - 2$:

x	$] -\infty ; -2[$	$] -2 ; 2[$	$] 2 ; 7[$	$] 7 ; +\infty[$
Signe de $7 - x$	+	+	+	-
Signe de $x^2 - 4$	+	-	+	+
Signe de $f(x) - 2$	+	-	+	-

La courbe est au-dessus de $y = 2$ sur $] -\infty ; -2[$ et sur $] 2 ; 7[$, au-dessous sur $] -2 ; 2[$ et sur $] 7 ; +\infty[$, et elle coupe l'asymptote au point d'abscisse 7.

22 Démontrer une limite infinie ★★★

a. Pour tout x , $\cos x \geq -1$, donc $x^2 + \cos x \geq x^2 - 1$. On divise par $x + 1 > 0$: l'inégalité est conservée, $f(x) \geq \frac{x^2 - 1}{x + 1}$.

b. $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$, donc $\frac{x^2 - 1}{x + 1} = x - 1$ pour $x > 0$. Comme $x - 1 \rightarrow +\infty$, le théorème de minoration donne $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

c. Pour $x > 0$, $x^2 + \cos x/x \geq x^2 - 1/x = x - 1/x$. Or $x \rightarrow +\infty$ et $1/x \rightarrow 0$, donc $x - 1/x \rightarrow +\infty$: la limite est $+\infty$ (minoration).