

Limites de fonctions

Cours de maths - Terminale

Que devient la valeur d'une fonction quand x devient gigantesque ? Et quand x s'approche d'un nombre où la fonction n'est pas définie, comme $x = 0$ pour $1/x$? Un chauffage atteint-il une température qui se stabilise, un coût moyen peut-il descendre aussi bas qu'on veut, une population explose-t-elle ? Les **limites** répondent à ces questions : elles décrivent le comportement d'une fonction « à l'infini » ou « tout près d'un point ». Elles permettent de trouver les **asymptotes** d'une courbe, première étape de toute étude de fonction. Dans ce chapitre, tu apprends à lire une limite, à la calculer avec les opérations, à lever les **formes indéterminées**, à utiliser la composition et les théorèmes de comparaison, puis à connaître les **croissances comparées**.

Rappels utiles

Pour étudier un quotient, tu auras besoin de son **signe** : un produit ou un quotient est positif quand il a un nombre pair de facteurs négatifs. Un trinôme se factorise avec ses racines : $x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2)$. Les fonctions de référence sont $x \mapsto x$, x^2 , x^3 , $\sqrt{x}$ et $1/x$. Enfin, la notation $x \rightarrow a^+$ signifie « x tend vers a en restant plus grand que a » et $x \rightarrow a^-$ « en restant plus petit ».

1. Limite en $+\infty$ et en $-\infty$

Quand on lit la courbe d'une fonction très loin vers la droite (ou vers la gauche), on observe trois comportements possibles : les valeurs deviennent **arbitrairement grandes**, arbitrairement grandes **négatives**, ou elles se **rapprochent d'un nombre fixe**.

Limite infinie en $+\infty$

Dire que f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$, et écrire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, signifie que $f(x)$ **dépasse n'importe quel réel A** dès que x est assez grand : pour tout réel A , il existe un réel B tel que $x > B$ entraîne $f(x) > A$.

De même $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ si $f(x)$ devient aussi négatif qu'on veut ; et on définit de la même façon les limites en $-\infty$.

Limite finie en $+\infty$

Dire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ (où ℓ est un réel) signifie que $f(x)$ se rapproche **autant qu'on veut** de ℓ dès que x est assez grand : tout intervalle ouvert contenant ℓ contient $f(x)$

Fiche en ligne : maths-facile.eu/limites-de-fonctions-cours-terminale/ · Cours, exercices et contrôles corrigés sur

pour x assez grand. La fonction est alors dite **convergente** en $+\infty$.

Limites de référence en $\pm\infty$

Pour tout entier $n \geq 1$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1/x^n = 0$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} 1/x^n = 0$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$.

En $-\infty$, x^n tend vers $+\infty$ si n est **pair** et vers $-\infty$ si n est **impair**.

Fonction	En $-\infty$	En $+\infty$
x	$-\infty$	$+\infty$
x^2	$+\infty$	$+\infty$
x^3	$-\infty$	$+\infty$
$\sqrt{x}$	pas définie	$+\infty$
$1/x$	0	0
$1/x^2$	0	0
$1/x^3$	0	0

Une limite peut ne pas exister

La fonction $\cos$ oscille entre -1 et 1 sans jamais se stabiliser : elle n'a **pas de limite** en $+\infty$. Une fonction n'a donc pas toujours de limite, et une fonction qui n'est pas bornée ne tend pas forcément vers l'infini (pense à $x \mapsto x \cdot \cos x$).

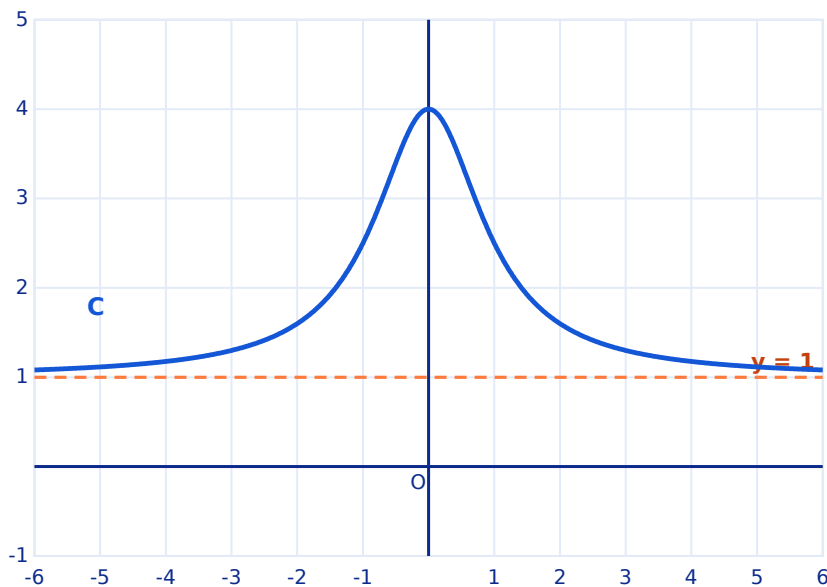
Exemple

Pour $f(x) = x^3$: $f(10) = 1\,000$, $f(100) = 1\,000\,000$; les valeurs explosent, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$. Pour $g(x) = 1/x^2$: $g(10) = 0,01$, $g(1\,000) = 0,000\,001$; les valeurs s'écrasent contre 0, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$.

2. Asymptote horizontale

Asymptote horizontale

Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ (ou $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$), la droite d'équation $y = \ell$ est **asymptote horizontale** à la courbe C_f en $+\infty$ (ou en $-\infty$) : la distance entre la courbe et la droite tend vers 0.



Sur la figure, $f(x) = 1 + \frac{3}{x^2+1}$. Quand $|x|$ grandit, $x^2 + 1$ tend vers $+\infty$, donc la fraction tend vers 0 et $f(x)$ tend vers 1 : la droite $y = 1$ est asymptote en $+\infty$ **et** en $-\infty$.

Position de la courbe par rapport à l'asymptote

Pour savoir si la courbe est au-dessus ou au-dessous de l'asymptote $y = \ell$, on étudie le **signe de $f(x) - \ell$** . Ici $f(x) - 1 = \frac{3}{x^2+1} > 0$: la courbe est toujours au-dessus de l'asymptote.

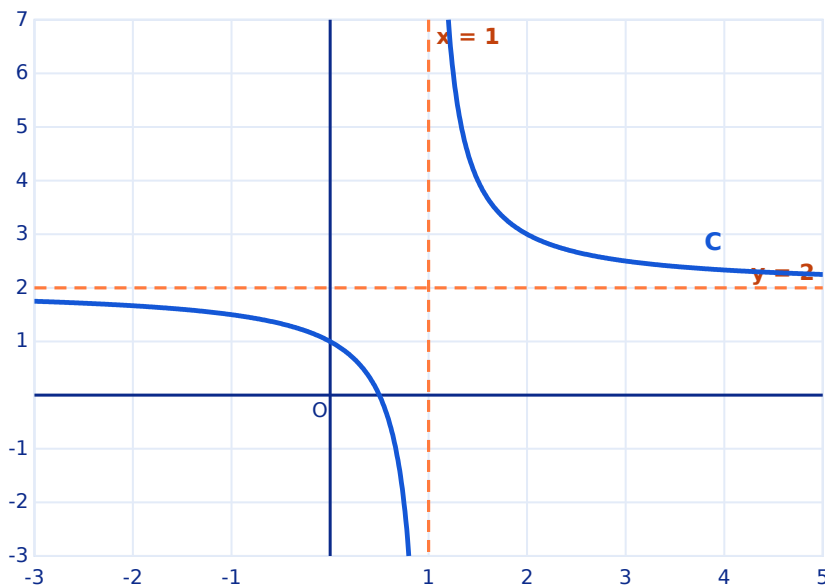
3. Limite en un réel et asymptote verticale

Limite infinie en un réel a

Dire que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ signifie que $f(x)$ devient aussi grand qu'on veut dès que x est assez proche de a (avec $x \neq a$). On distingue la **limite à droite** ($x \rightarrow a^+$, avec $x > a$) et la **limite à gauche** ($x \rightarrow a^-$, avec $x < a$). Si l'une des deux (ou les deux) est infinie, la droite d'équation $x = a$ est **asymptote verticale** à C_f .

Limites de référence en 0

$\lim_{x \rightarrow 0^+} 1/x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} 1/x = -\infty$. Plus généralement, pour n entier ≥ 1 : $\lim_{x \rightarrow 0^+} 1/x^n = +\infty$; en 0^- , la limite de $1/x^n$ vaut $+\infty$ si n est **pair** et $-\infty$ si n est **impair**. Aussi $\lim_{x \rightarrow 0^+} 1/\sqrt{x} = +\infty$.



Ici $f(x) = 2 + \frac{1}{x-1}$. En 1^+ , $x - 1$ est un petit nombre positif donc $\frac{1}{x-1} \rightarrow +\infty$; en 1^- , il tend vers $-\infty$. La droite $x = 1$ est asymptote verticale. En $\pm\infty$, $\frac{1}{x-1} \rightarrow 0$: la droite $y = 2$ est asymptote horizontale.

Limite en un réel du domaine

Pour les polynômes, les fractions rationnelles, $\sqrt{x}$, cos et sin, la limite en un réel a appartenant à l'ensemble de définition est tout simplement $f(a)$ (propriété admise). Par exemple $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 3x) = 4 - 6 = -2$.

Méthode : limite d'un quotient dont le dénominateur tend vers 0

1. Calcule la limite du numérateur : si c'est un réel non nul, la limite sera infinie.
2. Détermine le **signe du dénominateur** quand x tend vers a par la droite, puis par la gauche (un tableau de signes aide).
3. Applique la règle des signes pour conclure : $+\infty$ ou $-\infty$ de chaque côté.

Exemple

Soit $g(x) = \frac{3}{x+2}$. Le numérateur vaut 3 (positif). En -2^+ , $x + 2$ tend vers 0 en restant positif : $g(x) \rightarrow +\infty$. En -2^- , $x + 2$ reste négatif : $g(x) \rightarrow -\infty$. La droite $x = -2$ est asymptote verticale.

4. Opérations sur les limites

Dans les tableaux, f et g ont chacune une limite en a (qui peut être un réel, $+\infty$ ou $-\infty$) ; ℓ et ℓ' sont des réels. Le symbole **FI** signale une **forme indéterminée** : on ne peut pas

conclure directement.

Limite d'une somme $f + g$

$\lim f \downarrow \setminus \lim g \rightarrow$	l'	$+\infty$	$-\infty$
l	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	FI
$-\infty$	$-\infty$	FI	$-\infty$

Limite d'un produit $f \times g$ (règle des signes)

$\lim f \downarrow \setminus \lim g \rightarrow$	$l' > 0$	$l' < 0$	0	$+\infty$	$-\infty$
$l > 0$	$l \times l'$	$l \times l'$	0	$+\infty$	$-\infty$
$l < 0$	$l \times l'$	$l \times l'$	0	$-\infty$	$+\infty$
0	0	0	0	FI	FI
$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI	$-\infty$	$+\infty$

Limite d'un quotient f / g (0^+ : tend vers 0 par valeurs positives ; 0^- : par valeurs négatives)

$\lim f \downarrow \setminus \lim g \rightarrow$	$l' \neq 0$	0^+	0^-	$+\infty$	$-\infty$
$l > 0$	l / l'	$+\infty$	$-\infty$	0	0
$l < 0$	l / l'	$-\infty$	$+\infty$	0	0
0	0	FI	FI	0	0
$+\infty$	$\pm\infty$ (signe de l')	$+\infty$	$-\infty$	FI	FI
$-\infty$	$\pm\infty$ (signe de l')	$-\infty$	$+\infty$	FI	FI

Les quatre formes indéterminées

Ce sont : $+\infty - \infty$; $0 \times \infty$; ∞/∞ ; **$0/0$** . Le mot « indéterminée » ne veut pas dire que la limite n'existe pas, mais que **les règles ne suffisent pas** : il faut transformer l'expression.

Exemples résolus

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + \sqrt{x}) = +\infty$ car $x^2 \rightarrow +\infty$ et $\sqrt{x} \rightarrow +\infty$ (somme $+\infty + \infty$).
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3 - 2/x) = 3$ car $2/x \rightarrow 0$.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \cdot (1 + 1/x) : x^3 \rightarrow -\infty$ et $1 + 1/x \rightarrow 1 > 0$, donc le produit tend vers $-\infty$.

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} 5/x$: numérateur $5 > 0$, dénominateur $\rightarrow 0^+$: on trouve $+\infty$.

Piège classique

N'écris jamais « $+\infty - \infty = 0$ » ni « $\infty/\infty = 1$ » : ce sont des formes indéterminées. Par exemple $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - x) = +\infty$, alors que $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - x) = 0$: les deux sont de la forme $+\infty - \infty$, mais les résultats diffèrent.

5. Lever une forme indéterminée

Polynômes et fractions rationnelles en $\pm\infty$

- En $+\infty$ et en $-\infty$, un **polynôme** a la même limite que son **terme de plus haut degré**.
- En $+\infty$ et en $-\infty$, une **fraction rationnelle** a la même limite que le **quotient de ses termes de plus haut degré**.

Démonstration. Soit $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ avec $a_n \neq 0$. On factorise : $P(x) = x^n (a_n + a_{n-1}/x + \dots + a_0/x^n)$. Tous les termes sous la parenthèse sauf a_n tendent vers 0 (limites de référence), donc la parenthèse tend vers a_n et $P(x)$ a la même limite que $a_n x^n$. Pour un quotient, on applique cet argument au numérateur et au dénominateur.

Méthode 1 : factoriser par le terme dominant

Repère la puissance de x la plus grande, factorise-la, puis utilise $1/x^k \rightarrow 0$ pour les autres termes.

Exemple ($+\infty - \infty$). $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 4x^2 + 1)$: on écrit $x^3 - 4x^2 + 1 = x^3 (1 - 4/x + 1/x^3)$. La parenthèse tend vers 1 et $x^3 \rightarrow +\infty$, donc la limite est $+\infty$.

Exemple (∞/∞). $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - x + 3}{x^2 + 5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - 1/x + 3/x^2}{1 + 5/x^2} = 2$ (on a simplifié par x^2 en haut et en bas).

Méthode 2 : factoriser et simplifier (cas 0/0)

Quand numérateur et dénominateur tendent tous deux vers 0 en a , ils s'annulent en a : on peut les factoriser par $(x - a)$ puis simplifier.

Exemple. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3}$: pour $x \neq 3$, $\frac{x^2 - x - 6}{x - 3} = \frac{(x-3)(x+2)}{x-3} = x + 2$. La limite vaut donc $3 + 2 = 5$.

Méthode 3 : multiplier par la quantité conjuguée (racines)

Pour une forme $+\infty - \infty$ contenant une racine, on multiplie et divise par la **quantité conjuguée** : $(A - B)(A + B) = A^2 - B^2$.

Exemple. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+5} - \sqrt{x})$. Pour $x > 0$: $\sqrt{x+5} - \sqrt{x} = \frac{(x+5) - x}{\sqrt{x+5} + \sqrt{x}} = \frac{5}{\sqrt{x+5} + \sqrt{x}}$. Le dénominateur tend vers $+\infty$, donc la limite est 0.

Astuce

Avant de factoriser, **essaie toujours de remplacer** x par sa valeur limite : si le résultat n'est pas une forme indéterminée, tu as terminé. Les formes $+\infty - \infty$ en $\pm\infty$ pour un polynôme se règlent presque toujours par le terme de plus haut degré.

6. Limite d'une fonction composée

Théorème de composition

Soient a, b et c des éléments de $\mathbb{R} \cup \{-\infty ; +\infty\}$. Si $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = b$ et si $\lim_{X \rightarrow b} v(X) = c$, alors $\lim_{x \rightarrow a} v(u(x)) = c$.

Méthode

On pose $X = u(x)$: on calcule d'abord la limite de la fonction « intérieure » u , puis celle de la fonction « extérieure » v en cette valeur.

Exemples

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1}$: $u(x) = x^2 + 1 \rightarrow +\infty$ et $\lim_{X \rightarrow +\infty} \sqrt{X} = +\infty$, donc la limite est $+\infty$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \frac{2}{x})^3$: $u(x) = 1 + \frac{2}{x} \rightarrow 1$ et $X^3 \rightarrow 1$ quand $X \rightarrow 1$: la limite est 1.
- $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-2}$: on pose $X = x - 2 \rightarrow 0^+$, et $\frac{1}{X} \rightarrow +\infty$ en 0^+ : la limite est $+\infty$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos(\frac{1}{x})$: $\frac{1}{x} \rightarrow 0$ et $\cos$ vaut 1 en 0, donc la limite est 1.

7. Théorèmes de comparaison

Quand une expression est difficile à manipuler (par exemple avec $\sin$ ou $\cos$), on l'**encadre** par des fonctions dont on connaît les limites. Les énoncés qui suivent sont écrits en $+\infty$; ils restent vrais en $-\infty$ et en un réel a .

Théorèmes de comparaison

Minoration. Si $f(x) \geq g(x)$ pour x assez grand et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

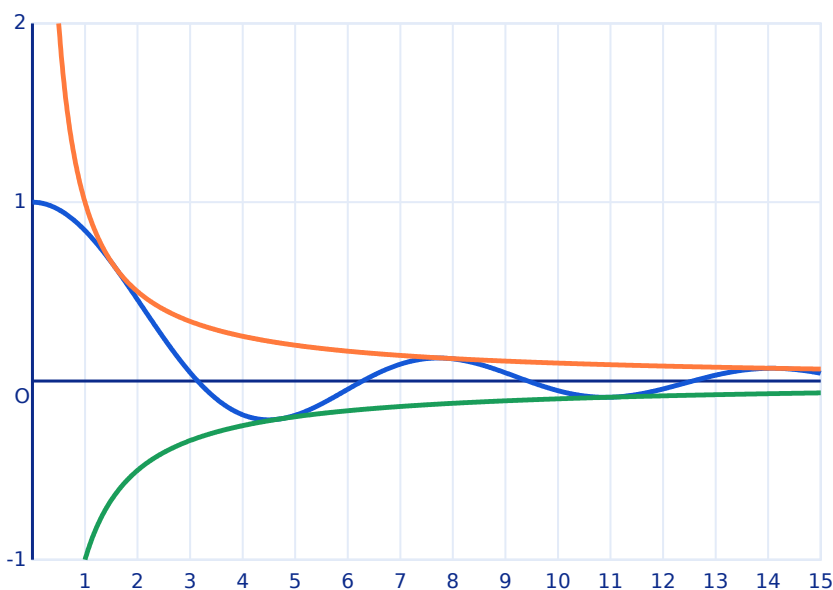
Majoration. Si $f(x) \leq g(x)$ pour x assez grand et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

Théorème des gendarmes. Si $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ pour x assez grand et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \ell$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$.

Démonstration (minoration). Soit A un réel. Comme g tend vers $+\infty$, il existe B tel que $x > B$ entraîne $g(x) > A$. Pour ces x (et x assez grand pour que $f \geq g$), on a $f(x) \geq g(x) > A$. Donc $f(x)$ dépasse tout réel A dès que x est assez grand : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Exemple : minoration

Pour tout réel x , $-1 \leq \sin x \leq 1$, donc $x + \sin x \geq x - 1$. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 1) = +\infty$, on obtient $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sin x) = +\infty$.



Exemple : gendarmes

Pour $x > 0$: $-1 \leq \sin x \leq 1$, donc en divisant par x : $-1/x \leq \sin x/x \leq 1/x$ (courbes orange et verte sur la figure). Les deux « gendarmes » tendent vers 0 en $+\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x/x = 0$: la courbe bleue est « coincée » entre eux.

Valeur absolue

Si $|f(x) - \ell| \leq u(x)$ avec $\lim u = 0$, alors $\lim f = \ell$: c'est une autre écriture du théorème

8. Croissances comparées

Que se passe-t-il pour x^n , e^x et $\ln x$ quand elles sont combinées ? Il s'agit de formes indéterminées (∞/∞ ou $0 \times \infty$) dont le résultat est à connaître. Les fonctions exponentielle et logarithme seront étudiées en détail plus loin dans l'année ; on admet ici ces résultats.

Croissances comparées (admisses)

Pour tout entier $n \geq 1$:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x/x^n = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$;
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x/x^n = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = 0$.

Autrement dit, **l'exponentielle l'emporte sur la puissance, qui l'emporte sur le logarithme.**

Exemples

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x/e^x = 0$ (inverse de e^x/x qui tend vers $+\infty$).
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x^2)$ est de la forme $+\infty - \infty$: on factorise $e^x - x^2 = x^2 (e^x/x^2 - 1)$, et la parenthèse tend vers $+\infty$: la limite est $+\infty$.
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$: près de 0, le facteur x « écrase » le logarithme.

À ne pas confondre

$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x = 0$ (on pose $X = -x$ et on retrouve $X^2/\exp(X) \rightarrow 0$), mais $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^x = +\infty$ (aucune indétermination : $+\infty \times +\infty$). Regarde toujours **où tend x** avant d'appliquer un résultat.

À retenir

- Une limite décrit ce que devient $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$, $-\infty$ ou un réel a (à gauche ou à droite).
- Si $\lim f = \ell$ en $\pm\infty$, la droite $y = \ell$ est **asymptote horizontale** ; si $\lim f = \pm\infty$ en a , la droite $x = a$ est **asymptote verticale**.
- Limites de référence : $x^n \rightarrow +\infty$, $1/x^n \rightarrow 0$ en $+\infty$; $1/x \rightarrow \pm\infty$ en 0^+ ou 0^- ; $1/x^2 \rightarrow +\infty$ en 0.
- Somme, produit, quotient : on applique les tableaux, sauf pour les 4 **formes**

indéterminées $+\infty - \infty$, $0 \times \infty$, ∞/∞ , **0/0**.

- En $\pm\infty$, polynôme et fraction rationnelle se comportent comme leurs termes de plus haut degré.
- Pour **0/0** : factoriser et simplifier ; pour une racine : quantité conjuguée.
- Composition : $\lim u = b$ et $\lim_{x \rightarrow b} v = c$ donnent $\lim v(u) = c$.
- Comparaison : minoration par $+\infty$, majoration par $-\infty$, gendarmes pour un encadrement de même limite.
- Croissances comparées : $e^x/x^n \rightarrow +\infty$, $\ln x/x^n \rightarrow 0$ en $+\infty$, $x^n \ln x \rightarrow 0$ en 0^+ .