

Limites de fonctions

Exercices de maths - Terminale

22 exercices classés par difficulté (★ facile, ★★ moyen, ★★★ difficile). Cherche d'abord sans regarder le corrigé !

1 Limites de référence ★★★

Donne, sans justification, les limites suivantes.

- a. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3$
- b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x}$
- c. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \mathbf{1/x^2}$
- d. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \mathbf{1/x}$
- e. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \mathbf{1/x}$
- f. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \mathbf{1/x^3}$

2 Vrai ou faux ? ★★★

Pour chaque affirmation, dis si elle est vraie ou fausse et justifie (un contre-exemple suffit pour une affirmation fausse).

- a. Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, alors $f(x) > 0$ pour x assez grand.
- b. Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, alors f est croissante sur $[0 ; +\infty[$.
- c. La courbe de $x \mapsto \mathbf{1/x^2}$ admet l'axe des ordonnées pour asymptote verticale.
- d. Comme $x^2 \rightarrow +\infty$ et $x^2 \rightarrow +\infty$, la limite de $x^2 - x^2$ en $+\infty$ n'existe pas.

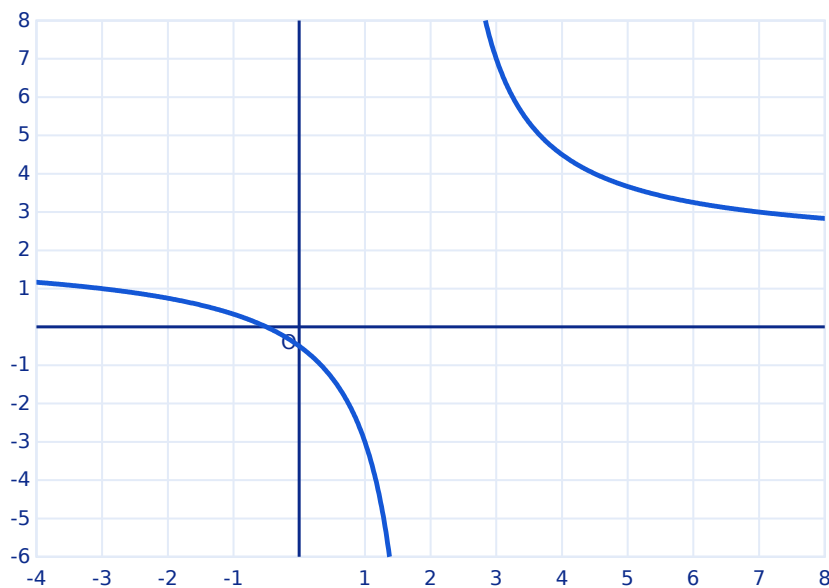
3 Opérations simples ★★★

Détermine les limites suivantes en citant les limites de référence utilisées.

- a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x} + 5)$
- b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3 - \mathbf{1/x})$
- c. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 4)$
- d. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\mathbf{1/x} + 2)$
- e. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \sqrt{x}$
- f. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + \mathbf{1/x})$

4 Lecture graphique ★★★

On donne la courbe d'une fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.



- Lis $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- Lis $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$.
- Quelles sont les équations des asymptotes à la courbe ?

5 Asymptotes d'une courbe ★★★

Soit $f(x) = 3 + \frac{2}{x+4}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-4\}$.

- Calcule les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$. Que peux-tu dire de la courbe ?
- Calcule les limites de f en -4^+ et en -4^- . Que peux-tu dire de la courbe ?
- Étudie la position de la courbe par rapport à son asymptote horizontale.

6 Quotient et signe du dénominateur ★★★

Détermine les limites suivantes.

- $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{x-3}$
- $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{x-3}$
- $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{5}{x+2}$
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} -\frac{2}{x^2}$
- $\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{3}{4-x}$

7 Coût moyen de fabrication ★★★

Un atelier fabrique chaque jour q objets ($q > 0$). Le coût total est $2q + 300$ euros. Le **coût moyen** par objet est $C(q) = \frac{2q+300}{q}$.

- a. Montre que $C(q) = 2 + 300/q$.
- b. Calcule $\lim_{q \rightarrow +\infty} C(q)$ et interprète le résultat.
- c. Calcule $\lim_{q \rightarrow 0^+} C(q)$ et interprète le résultat.
- d. À partir de quelle production quotidienne le coût moyen est-il inférieur ou égal à 2,50 euros ?

8 Polynômes en l'infini ★★★

Détermine les limites suivantes (forme indéterminée à lever).

- a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 5x^2 + 2)$
- b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^4 + x^3)$
- c. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - x^2)$
- d. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (4x^3 - x)$

9 Fractions rationnelles en l'infini ★★★

Calcule les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ des fonctions suivantes.

- a. $f(x) = 3x^2 - x + 1/x^2 + 4$
- b. $g(x) = 2x + 1/x^2 - 3$
- c. $h(x) = x^3 + 1/2x^2 - 1$
- d. $k(x) = 5x - 2/1 - x$

10 Formes 0/0 ★★★

Détermine les limites suivantes.

- a. $\lim_{x \rightarrow 3} x^2 - 9/x - 3$
- b. $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 - 5x + 6/x - 2$
- c. $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 - x/x$
- d. $\lim_{x \rightarrow 2} x + 1/x^2 - 4x + 4$

11 Deux asymptotes verticales ★★★

Soit $f(x) = x - 1/x^2 - x - 2$.

- a. Factorise le dénominateur et donne l'ensemble de définition de f .
- b. Détermine les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
- c. Détermine les limites de f à gauche et à droite de chaque valeur interdite.
- d. Donne les équations des asymptotes à la courbe.

12 Quantité conjuguée ★★★

Détermine les limites suivantes.

- a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+3} - \sqrt{x})$
- b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+1} - x)$
- c. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x} - x)$
- d. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+1} + x)$

13 Composition ★★★

Détermine les limites suivantes en utilisant le théorème de composition.

- a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+1}$
- b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + 2/x)^3$
- c. $\lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{1/x-2}$
- d. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos(1/x)$
- e. $\lim_{x \rightarrow -\infty} 1/\sqrt{x^2+1}$

14 Encadrements simples ★★★

En utilisant un théorème de comparaison, détermine :

- a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \cos x)$
- b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x - 2 \sin x)$
- c. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^2 + 3 \sin x)$
- d. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos x/x^2$

15 Position par rapport à l'asymptote ★★★

Soit $f(x) = 2x+3/x+1$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

- a. Montre que $f(x) = 2 + 1/x+1$.
- b. Dédus-en les limites de f en $+\infty$, en $-\infty$ et en -1 (à gauche et à droite).
- c. Donne les équations des asymptotes, puis étudie la position de la courbe par rapport à l'asymptote horizontale.

16 Trouver des paramètres ★★★

Soit $f(x) = ax+b/x-1$ où a et b sont deux réels. La courbe de f admet la droite d'équation $y = 3$ pour asymptote horizontale et passe par le point $A(2 ; 7)$.

- a. Exprime $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ en fonction de a et déduis la valeur de a .
- b. Utilise le point A pour trouver b .

c. Pour $f(x) = 3x+1/x-1$, étudie les limites en 1 et vérifie que $f(x) - 3 = 4/x-1$.

17 Gendarmes ★★★

Détermine les limites suivantes à l'aide du théorème des gendarmes.

- a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x + \sin x/x + 1$
- b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3 + \cos x/x^2 + 1$
- c. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cos x/x^2 + 1$

18 Croissances comparées ★★★

Détermine les limites suivantes (E désigne la fonction exponentielle : $E^x = e^x$).

- a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x/x^2$
- b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x}$
- c. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x/x^2$
- d. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$
- e. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x^2)$
- f. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x$

19 Une racine et un quotient ★★★

On considère $f(x) = \sqrt{x^2+x} - x$ pour $x > 0$.

- a. Montre que $f(x) = x/\sqrt{x^2+x} + x$.
- b. Divise numérateur et dénominateur par x et déduis $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- c. Interprète le résultat pour la courbe de f .

20 Vitesse limite d'un train ★★★

Un train accélère à partir de l'arrêt. Sa vitesse, en km/h, au bout de t minutes est $v(t) = 80t/t+5$ ($t \geq 0$).

- a. Montre que $v(t) = 80 - 400/t+5$.
- b. Calcule $\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t)$. Que représente ce nombre ?
- c. Au bout de combien de minutes le train atteint-il 72 km/h ?
- d. Le train atteint-il un jour 80 km/h ? Justifie.

21 Étude complète des asymptotes ★★★

Soit $f(x) = 2x^2 - x - 1/x^2 - 4$.

- a. Détermine l'ensemble de définition de f .
- b. Calcule les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
- c. Calcule les limites de f en 2^+ , 2^- , -2^+ et -2^- .
- d. Donne les asymptotes à la courbe.
- e. Montre que $f(x) - 2 = \frac{7-x}{x^2-4}$ puis étudie la position de la courbe par rapport à l'asymptote horizontale.

22 Démontrer une limite infinie ★★★

On considère $f(x) = \frac{x^2 + \cos x}{x+1}$ pour $x > 0$.

- a. Montre que pour $x > 0$, $f(x) \geq \frac{x^2 - 1}{x+1}$.
- b. Simplifie $\frac{x^2 - 1}{x+1}$ puis déduis $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- c. Rédige la même démarche pour montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + \cos x}{x} = +\infty$ (sans simplification utile).