

Limites de suites

Corrigé du contrôle - Terminale

Durée conseillée : 45 minutes. Barème sur 20 points. Calculatrice interdite.

1 Limites directes / 3 pts

- a. $-2n^3 \rightarrow -\infty$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$. (1 pt)
 b. $v_n = (4 + 1/n^2)/(1 + 3/n) \rightarrow 4/1$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 4$. (1 pt : factorisation 0,5 + résultat 0,5)
 c. $w_n = n(1/\sqrt{n} - 1)$; $1/\sqrt{n} - 1 \rightarrow -1$ et $n \rightarrow +\infty$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = -\infty$. (1 pt)

Barème : 1 pt par question.

2 Indéterminées / 3 pts

- a. $u_n = (n + 1 + 1/n)/(2 + 3/n)$: numérateur $\rightarrow +\infty$, dénominateur $\rightarrow 2$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$. (1,5 pt)
 b. $v_n = ((4n^2 + n) - 4n^2)/(\sqrt{4n^2 + n} + 2n) = n/(\sqrt{4n^2 + n} + 2n) = 1/(\sqrt{4 + 1/n} + 2)$ (0,75 pt), qui tend vers $1/(2 + 2)$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 1/4$. (0,75 pt)

Barème : a) 1,5 pt ; b) 1,5 pt.

3 Encadrements / 3 pts

- a. $-1 \leq \sin n \leq 1$ donne $4n - 2 \leq 4n + 2 \sin n \leq 4n + 2$; on divise par $2n + 1 > 0$ (0,5 pt). Les bornes valent $(4 - 2/n)/(2 + 1/n)$ et $(4 + 2/n)/(2 + 1/n)$: elles tendent vers 2 (0,5 pt). Gendarmes : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$. (0,5 pt)
 b. $\cos n \geq -1$ donc $w_n \geq n^2 - 5$ (0,5 pt) ; $n^2 - 5 \rightarrow +\infty$; par comparaison $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = +\infty$. (0,5 pt)

Barème : a) 1,5 pt ; b) 1,5 pt (dont 0,5 pour la justification de la comparaison).

4 Suites géométriques / 4 pts

- a. $-1 < -0,5 < 1$ donc $(-0,5)^n \rightarrow 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 4$. (1 pt)
 b. $S_n = 3 \times (1 - (1/2)^{n+1})/(1 - 1/2) = 6 \times (1 - (1/2)^{n+1})$ (1 pt). Comme $(1/2)^{n+1} \rightarrow 0$,

$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 6$. (1 pt)

c. $1,2 > 1$ donc $1,2^n \rightarrow +\infty$; le premier terme est négatif : $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = -\infty$. (1 pt)

Barème : a) 1 pt ; b) 2 pts ; c) 1 pt.

5 Suite récurrente et seuil / 4 pts

a. $u_1 = 0,6 \times 1 + 2 = \mathbf{2,6}$; $u_2 = 0,6 \times 2,6 + 2 = \mathbf{3,56}$. (0,5 pt)

b. $v_{n+1} = 0,6u_n + 2 - 5 = 0,6u_n - 3 = 0,6(u_n - 5) = 0,6v_n$: suite géométrique de raison 0,6, $v_0 = -4$ (1 pt). Donc $v_n = -4 \times 0,6^n$ et $\mathbf{u_n = 5 - 4 \times 0,6^n}$. (0,5 pt)

c. $0 < 0,6 < 1$ donc $0,6^n \rightarrow 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{u_n = 5}$. (1 pt)

d. while $u \leq 4.99$: (0,5 pt). Le programme affiche **12** : $u_{12} = 5 - 4 \times 0,6^{12} \approx 4.9913 > 4,99$ et $u_{11} \approx 4.9855 \leq 4,99$. (0,5 pt)

Barème : a) 0,5 pt ; b) 1,5 pt ; c) 1 pt ; d) 1 pt. Calculatrice autorisée pour la question d.

6 Convergence monotone / 3 pts

a. Initialisation : $u_0 = 1 \in [0 ; 4]$. Hérédité : si $0 \leq u_n \leq 4$, alors $4 \leq 3u_n + 4 \leq 16$, donc $2 \leq u_{n+1} \leq 4$, d'où $0 \leq u_{n+1} \leq 4$. (1 pt)

b. $u_{n+1} - u_n = (3u_n + 4 - u_n^2)/(\sqrt{(3u_n + 4) + u_n}) = (4 - u_n)(u_n + 1)/(\sqrt{(3u_n + 4) + u_n}) \geq 0$ car $0 \leq u_n \leq 4$. (1 pt)

c. Croissante et majorée par 4 : convergente vers ℓ (0,5 pt). $\ell = \sqrt{3\ell + 4} \Rightarrow \ell^2 - 3\ell - 4 = 0 \Rightarrow (\ell - 4)(\ell + 1) = 0$; $\ell \geq 0$ donc $\mathbf{\ell = 4}$. (0,5 pt)

Barème : a) 1 pt ; b) 1 pt ; c) 1 pt. Calculatrice non autorisée pour cet exercice.