

Limites de suites

Corrigé des exercices - Terminale

Corrigé détaillé des exercices du chapitre. Vérifie tes réponses étape par étape et corrige-toi.

1 Limites de référence ★★★

On utilise les limites de référence et les opérations simples.

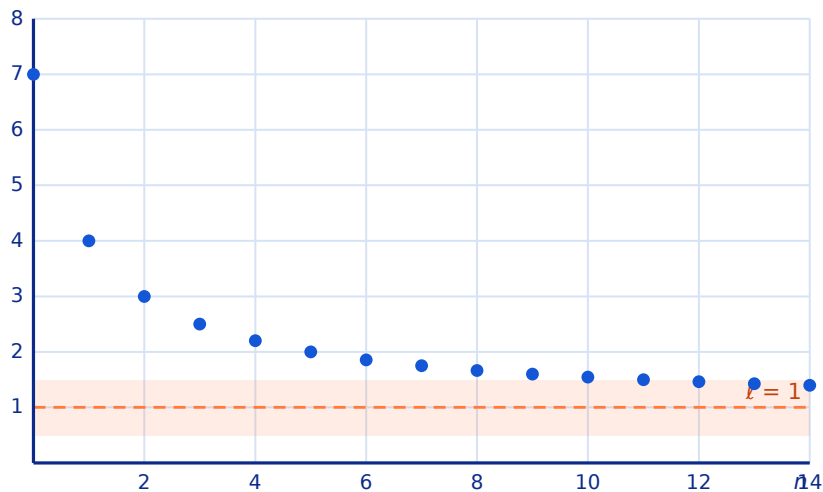
- a. $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 = +\infty$.
- b. $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-n^2) = -\infty$.
- c. $n^3 \rightarrow +\infty$ donc $1/n^3 \rightarrow 0$.
- d. $-2n \rightarrow -\infty$ donc $5 - 2n \rightarrow -\infty$.
- e. $\sqrt{n} \rightarrow +\infty$ donc $\sqrt{n} + 10 \rightarrow +\infty$.

2 Premier rang qui dépasse un seuil ★★★

- a. $3n + 2 > 1\,000 \Leftrightarrow 3n > 998 \Leftrightarrow n > 332,67\dots$ Le plus petit entier est **$n = 333$** .
Vérification : $u_{333} = 1\,001 > 1\,000$ et $u_{332} = 998 \leq 1\,000$.
- b. $5 - 2n < -100 \Leftrightarrow -2n < -105 \Leftrightarrow n > 52,5$ (on change le sens en divisant par -2).
Le plus petit entier est **$n = 53$** . Vérification : $v_{53} = -101 < -100$ et $v_{52} = -99$.

3 Lire un nuage de points ★★★

- a. Les points descendent et se rapprochent de l'ordonnée 1 : (u_n) semble décroissante et de limite 1.
- b. $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n + 1) = +\infty$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 6/(n + 1) = 0$ et **$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$** .
- c. $|u_n - 1| = 6/(n + 1) < 0,5 \Leftrightarrow n + 1 > 12 \Leftrightarrow n > 11$. Donc à partir de **$n = 12$** ($u_{12} = 1 + 6/13 \approx 1,46$, alors que $u_{11} = 1,5$ ne convient pas).



4 Limite et bande autour de ℓ ★★★

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1/n = 0$ donc **$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4$** .
- $|u_n - 4| = 1/n < 0,001 \Leftrightarrow n > 1\,000$. Le plus petit entier est **$n = 1\,001$** ($u_{1000} = 4,001$: la différence vaut exactement 0,001, pas strictement moins).

5 Opérations simples ★★★

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3/n^2 = 0$ donc **$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 5$** .
- $n + 1 \rightarrow +\infty$ et $n^2 \rightarrow +\infty$, donc par produit **$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$** .
- $2 + 1/n \rightarrow 2$ et $3 - 1/n \rightarrow 3$, donc **$\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 2 \times 3 = 6$** .
- $n^2 \rightarrow +\infty$ donc **$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = -\infty$** .

6 Suites (q^n) ★★★

- $3/2 > 1$ donc **$+\infty$** .
- $0 < 0,8 < 1$ donc **0**.
- $-1 < -0,5 < 0$ donc **0**.
- $q = -2 \leq -1$: **pas de limite** (les termes valent alternativement des nombres positifs et négatifs de plus en plus grands en valeur absolue).
- Comme $\sqrt{2} \approx 1,414$, $\sqrt{2}/2 \approx 0,707 \in]-1 ; 1[$ donc **0**.

7 Vrai ou faux ★★★

- Faux.** $u_n = n + 2(-1)^n$: $u_0 = 2$ et $u_1 = 1 - 2 = -1 < u_0$, donc non croissante, alors qu'elle tend vers $+\infty$ ($u_n \geq n - 2$).
- Vrai.** Une suite convergente reste dans un intervalle $]l - 1 ; l + 1[$ à partir d'un rang ; il n'y a qu'un nombre fini de termes avant, donc elle est bornée.
- Faux.** $(-1)^n$ est bornée (entre -1 et 1) mais n'a pas de limite.
- Vrai.** C'est le théorème de convergence des suites monotones.

8 Fractions simples ★★★

- a. $u_n = 2 + 1/n \rightarrow 2$.
- b. $v_n = 1 + 1/n^2 \rightarrow 1$.
- c. $n + 1 \rightarrow +\infty$, donc $w_n \rightarrow 0$.

9 Polynômes et fractions rationnelles ★★★

- a. $u_n = n^2(1 - 5/n)$; $1 - 5/n \rightarrow 1$ et $n^2 \rightarrow +\infty$: $+\infty$.
- b. Terme dominant $-2n^3$: $v_n = n^3(-2 + 1/n + 1/n^3)$ avec $-2 + \dots \rightarrow -2$: $-\infty$.
- c. $w_n = (3 + 1/n)/(1 - 4/n^2) \rightarrow 3/1$: **3**.
- d. $x_n = (n + 1/n)/(1 + 3/n)$: numérateur $\rightarrow +\infty$, dénominateur $\rightarrow 1$: $+\infty$ (degré 2 contre degré 1).
- e. Degré 1 au numérateur, degré 2 au dénominateur : $y_n = (4/n + 1/n^2)/(1 + 2/n^2) \rightarrow 0/1$: **0**.

10 Quantité conjuguée ★★★

- a. $(\sqrt{n+3} - \sqrt{n})(\sqrt{n+3} + \sqrt{n}) = (n+3) - n = 3$, d'où l'égalité. Le dénominateur tend vers $+\infty$, donc la limite est **0**.
- b. $v_n = ((n^2 + n) - n^2)/(\sqrt{n^2 + n} + n) = n/(\sqrt{n^2 + n} + n) = 1/(\sqrt{1 + 1/n} + 1)$ (on a divisé par $n > 0$ en haut et en bas, avec $\sqrt{n^2 + n}/n = \sqrt{1 + 1/n}$). Comme $\sqrt{1 + 1/n} \rightarrow 1$, **$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 1/2$** .

11 Comparaison ★★★

- a. Comme $\cos(n) \geq -1$, $u_n \geq 2n - 3$. Or $2n - 3 \rightarrow +\infty$, donc **$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$** .
- b. Comme $\sin(n) \leq 1$, $v_n \leq -n^2 + 4$. Or $-n^2 + 4 \rightarrow -\infty$, donc **$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$** .

12 Théorème des gendarmes ★★★

- a. Comme $-1 \leq (-1)^n \leq 1$, on a $2n - 1 \leq 2n + (-1)^n \leq 2n + 1$. On divise par $n + 1 > 0$, ce qui conserve les inégalités.
- b. Les deux membres extrêmes sont de la forme $(2 - 1/n)/(1 + 1/n)$ et $(2 + 1/n)/(1 + 1/n)$: ils tendent vers 2. D'après le théorème des gendarmes, **$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$** .

13 Suites géométriques ★★★

- a. $0 < 0,6 < 1$ donc **$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$** .
- b. $2^n \rightarrow +\infty$ donc $3 \times 2^n - 1 \rightarrow +\infty$.
- c. $(1/2)^n \rightarrow 0$ donc **$\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 4$** .

14 Somme de termes géométriques ★★★

- a. Raison $q = 1/2$: $S_n = (1 - (1/2)^{n+1})/(1 - 1/2) = 2(1 - (1/2)^{n+1}) = 2 - (1/2)^n$. Comme $(1/2)^n \rightarrow 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 2$.
- b. Raison $q = 3$: $T_n = (3^{n+1} - 1)/2$. Comme $3^{n+1} \rightarrow +\infty$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = +\infty$.

15 Seuil avec Python (suite géométrique) ★★★

- a. $0 < 0,9 < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.
- b. Il faut continuer tant que u est supérieur ou égal à 5 :

```
n = 0
u = 200
while u >= 5:
    u = 0.9 * u
    n = n + 1
print(n)
```

- c. Le programme affiche **36** : $200 \times 0,9^36 \approx 4.51 < 5$ alors que $200 \times 0,9^35 \approx 5.01 \geq 5$.

16 Suite arithmético-géométrique ★★★

- a. $v_{n+1} = u_{n+1} - 6 = 0,5u_n + 3 - 6 = 0,5u_n - 3 = 0,5(u_n - 6) = 0,5 v_n$. Donc (v_n) est géométrique de raison 0,5 et de premier terme $v_0 = 2 - 6 = -4$.
- b. $v_n = -4 \times 0,5^n$, donc $u_n = 6 - 4 \times 0,5^n$.
- c. $0 < 0,5 < 1$ donc $0,5^n \rightarrow 0$, et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 6$.

17 Quotient de deux suites exponentielles ★★★

$u_n = ((2/3)^n - 1)/((2/3)^n + 1)$. Comme $0 < 2/3 < 1$, $(2/3)^n \rightarrow 0$. Donc le numérateur tend vers -1 , le dénominateur vers 1 : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -1$.

18 Suite récurrente et racine ★★★

- a. Initialisation : $u_0 = 0 \in [0 ; 2]$. Hérédité : si $0 \leq u_n \leq 2$, alors $2 \leq u_n + 2 \leq 4$ et, la racine étant croissante, $\sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq 2$. Donc $0 \leq u_{n+1} \leq 2$.
- b. $u_{n+1} - u_n = (u_n + 2 - u_n^2)/(\sqrt{u_n + 2} + u_n)$ (quantité conjuguée) $= (2 - u_n)(1 + u_n)/(\sqrt{u_n + 2} + u_n)$. Avec $0 \leq u_n \leq 2$, le numérateur est ≥ 0 et le dénominateur > 0 . Donc $u_{n+1} \geq u_n$.
- c. Croissante et majorée par 2 : (u_n) converge vers ℓ . Par passage à la limite, $\ell = \sqrt{(\ell + 2)}$, donc $\ell^2 - \ell - 2 = 0$, soit $(\ell - 2)(\ell + 1) = 0$. Comme $\ell \geq 0$, $\ell = 2$.

19 Approximation de $\sqrt{2}$ (Héron) ★★★

- a. $u_1 = (2 + 1)/2 = 3/2$; $u_2 = (3/2 + 4/3)/2 = (17/6)/2 = 17/12$.
- b. $u_n > 0$ par récurrence (somme de deux positifs divisée par 2). Ensuite $u_{n+1}^2 - 2 = (u_n^2 + 4 + 4/u_n^2)/4 - 2 = (u_n^2 - 4 + 4/u_n^2)/4 = (u_n^2 - 2)^2/(4u_n^2) \geq 0$. Donc $u_{n+1}^2 \geq 2$ et $u_{n+1} \geq \sqrt{2}$ pour tout $n \geq 0$, c'est-à-dire $u_n \geq \sqrt{2}$ pour $n \geq 1$.
- c. $u_{n+1} - u_n = (2/u_n - u_n)/2 = (2 - u_n^2)/(2u_n) \leq 0$ si $u_n \geq \sqrt{2}$, donc (u_n) décroît à partir du rang 1. Décroissante et minorée par $\sqrt{2}$, elle converge vers $\ell \geq \sqrt{2}$; comme $\ell = (\ell + 2/\ell)/2$, $\ell^2 = 2$ et $\ell = \sqrt{2}$.

20 Épargne et seuil ★★★

- a. $C_1 = 1,04 \times 5\,000 + 400 = \mathbf{5\,600\,€}$.
- b. $D_{n+1} = 1,04C_n + 400 + 10\,000 = 1,04C_n + 10\,400 = 1,04(C_n + 10\,000) = 1,04 D_n$.
Donc (D_n) est géométrique de raison 1,04, avec $D_0 = 15\,000$. $D_n = 15\,000 \times 1,04^n$
et $\mathbf{C_n = 15\,000 \times 1,04^n - 10\,000}$.
- c. $1,04 > 1$ donc $1,04^n \rightarrow +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{C_n = +\infty}$.
- d. On cherche $15\,000 \times 1,04^n - 10\,000 > 20\,000 \Leftrightarrow 1,04^n > 2$. La calculatrice (ou le programme Python avec while) donne $C_{17} \approx 19219\,€$ et $C_{18} \approx 20387\,€$. Le capital dépasse 20 000 € à partir de la **18^e année**.

21 Concentration et seuil ★★★

- a. $u_1 = 0,9 \times 50 + 4 = \mathbf{49\,mg/L}$.
- b. $v_{n+1} = 0,9u_n + 4 - 40 = 0,9u_n - 36 = 0,9(u_n - 40) = 0,9 v_n$; $v_0 = 10$. Donc $v_n = 10 \times 0,9^n$ et $\mathbf{u_n = 40 + 10 \times 0,9^n}$.
- c. $0,9^n \rightarrow 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{u_n = 40\,mg/L}$.

```
d. n = 0
u = 50
while u >= 41:
    u = 0.9 * u + 4
    n = n + 1
print(n)
```

Le programme affiche **22** : $40 + 10 \times 0,9^{22} \approx 40.985 < 41$ alors que $u_{21} \approx 41.094$.

22 Bernoulli et divergence ★★★

- a. Initialisation : $n = 0$ donne $1 \geq 1$. Hérédité : si $(1 + a)^n \geq 1 + na$, en multipliant par $1 + a > 0$: $(1 + a)^{n+1} \geq 1 + (n + 1)a + na^2 \geq 1 + (n + 1)a$. La propriété est

héréditaire, donc vraie pour tout n .

- b. Avec $a = 0,02$: $1,02^n \geq 1 + 0,02n$, et $1 + 0,02n \rightarrow +\infty$. Par comparaison, **$\lim_{n \rightarrow +\infty} 1,02^n = +\infty$** .
- c. $1 + 0,02n > 1\,000 \Leftrightarrow n > 49\,950$. Donc pour $n \geq 49\,951$, $1,02^n \geq 1 + 0,02n > 1\,000$ (le vrai rang est bien plus petit, mais l'inégalité suffit à prouver l'existence d'un rang).

23 Formes indéterminées délicates ★★★

- a. $u_n = (n - 3)/(1/n - 2)$ après division par n : le numérateur tend vers $+\infty$, le dénominateur vers -2 . Donc **$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$** .
- b. $v_n = n(1 - 3/\sqrt{n})$; $1 - 3/\sqrt{n} \rightarrow 1$ et $n \rightarrow +\infty$, donc **$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$** .

24 Somme de racines ★★★

- a. Pour tout $k \leq n$, $\sqrt{k} \leq \sqrt{n}$ donc $1/\sqrt{k} \geq 1/\sqrt{n}$. En additionnant les n inégalités : $S_n \geq n \times 1/\sqrt{n} = \sqrt{n}$.
- b. $\sqrt{n} \rightarrow +\infty$; par comparaison, **$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$** .