

Limites de suites

Cours de maths - Terminale

Que devient le nombre de bactéries d'une culture au bout de très longtemps ? Et la quantité de médicament restant dans le sang après des dizaines de prises ? Étudier la **limite d'une suite**, c'est prédire le comportement de u_n lorsque n devient immense. Dans ce chapitre, tu apprends à dire si une suite **explose**, **se stabilise** ou **ne se décide pas**, à calculer des limites avec des règles sûres, à lever les cas douteux, à encadrer une suite pour la piéger, à maîtriser les suites géométriques, et à écrire un programme Python qui cherche à partir de quel rang une valeur est dépassée.

1. Rappels : suites, monotonie, majorant

Une suite (u_n) associe à chaque entier n (à partir d'un certain rang) un réel u_n . Tu l'as définie de deux façons : **explicitement** ($u_n = 3n + 2$) ou par **récurrence** ($u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 0,5 u_n + 4$). Voici le vocabulaire utile pour la suite du chapitre.

- (u_n) est **croissante** si $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout n ; **décroissante** si $u_{n+1} \leq u_n$; **monotone** si elle est l'un ou l'autre. Pour le prouver, on étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$ (ou on compare u_{n+1}/u_n à 1 si tous les termes sont strictement positifs).
- (u_n) est **majorée** s'il existe un réel M tel que $u_n \leq M$ pour tout n ; **minorée** s'il existe m tel que $u_n \geq m$; **bornée** si elle est les deux.
- Le **raisonnement par récurrence** démontre qu'une propriété $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$: on vérifie $P(n_0)$ (initialisation), puis on prouve que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ (hérédité).

Inégalité de Bernoulli

Pour tout réel $a \geq 0$ (et même $a \geq -1$) et tout entier $n \geq 0$: **$(1 + a)^n \geq 1 + na$** .

Démonstration. Par récurrence sur n . Initialisation : pour $n = 0$, $(1 + a)^0 = 1 \geq 1 + 0$. Hérédité : supposons $(1 + a)^n \geq 1 + na$ pour un entier n . Comme $1 + a \geq 0$, on multiplie par $(1 + a)$: $(1 + a)^{n+1} \geq (1 + na)(1 + a) = 1 + (n + 1)a + na^2 \geq 1 + (n + 1)a$, car $na^2 \geq 0$. La propriété est donc vraie au rang $n + 1$, donc pour tout n .

2. Limite infinie

Limite $+\infty$ et $-\infty$

On dit que (u_n) **tend vers $+\infty$** si tout intervalle $[A ; +\infty[$ contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang. Autrement dit : **quel que soit le réel A** , on a $u_n \geq A$ dès que n

est assez grand. On écrit $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

De même, (u_n) **tend vers** $-\infty$ si, pour tout réel A , on a $u_n \leq A$ à partir d'un certain rang : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

Limites de référence

$\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^k = +\infty$ pour tout entier $k \geq 1$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = +\infty$.

Trouver un rang à partir duquel on dépasse A

Soit $u_n = 3n + 2$. On veut $u_n > 1\,000$. On résout $3n + 2 > 1\,000 \Leftrightarrow n > 332,67$. Donc $u_n > 1\,000$ dès que $n \geq 333$. Comme on peut faire de même avec n'importe quel A , $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Suite croissante non majorée

Toute suite **croissante et non majorée** tend vers $+\infty$.

Démonstration. Soit A un réel. Comme (u_n) n'est pas majorée, A n'est pas un majorant : il existe un rang p tel que $u_p > A$. La suite étant croissante, pour tout $n \geq p$, $u_n \geq u_p > A$. Ainsi tout intervalle $[A ; +\infty[$ contient les termes à partir du rang p : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Piège

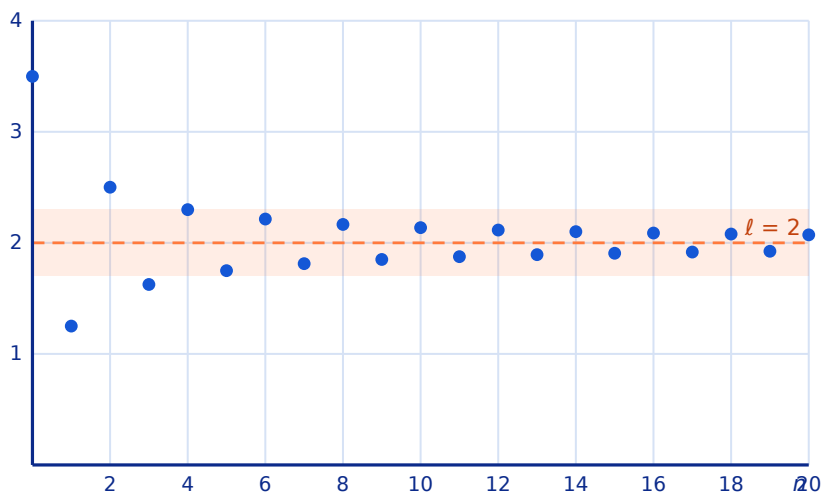
Une suite qui tend vers $+\infty$ n'est pas forcément croissante : $u_n = n + 2(-1)^n$ tend vers $+\infty$ mais n'est pas monotone. Et une suite non majorée ne tend pas forcément vers $+\infty$: $u_n = n \times (1 + (-1)^n)$ vaut 0 pour n impair, et $2n$ pour n pair.

3. Limite finie et convergence

Suite convergente

La suite (u_n) **converge vers le réel** ℓ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang. On écrit $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$. Une suite qui ne converge pas est dite **divergente** (elle tend vers $\pm\infty$, ou elle n'a pas de limite).

Concrètement, tu choisis une « bande » aussi étroite que tu veux autour de ℓ , par exemple $]\ell - 0,001 ; \ell + 0,001[$: les termes finissent tous par y rester. Sur la figure, la bande orangée autour de $\ell = 2$ contient les points à partir du rang 10.



Unicité et limites de référence

Si une suite converge, sa limite est **unique**. Et :

$\lim_{n \rightarrow +\infty} 1/n = 0$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1/n^2 = 0$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1/n^k = 0$ (k entier ≥ 1) ; $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1/\sqrt[n]{n} = 0$. Une suite constante égale à c converge vers c .

Une suite convergente est bornée

Si (u_n) converge, alors elle est bornée. La réciproque est **fausse** : $u_n = (-1)^n$ est bornée mais n'a pas de limite.

Piège

Ne confonds pas « n'a pas de limite » et « tend vers l'infini ». La suite $(-1)^n$ alterne entre -1 et 1 : elle est divergente sans tendre vers $+\infty$ ni $-\infty$. Ne dis jamais que sa limite « est 1 » ou « est -1 ».

4. Opérations sur les limites

Dans les tableaux suivants, l et l' sont des réels, et « F.I. » désigne une **forme indéterminée** : on ne peut pas conclure directement (voir la partie 5).

Somme $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n)$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	l'	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n)$	$l + l'$	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.

Produit $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n \times v_n)$ (on applique la règle des signes pour $\pm\infty$)

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	ℓ	$\ell \neq 0$	0	$\pm \infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	ℓ'	$\pm \infty$	$\pm \infty$	$\pm \infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n \times v_n)$	$\ell \times \ell'$	$\pm \infty$	F.I.	$\pm \infty$

Quotient $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n / v_n)$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	ℓ	ℓ	$\pm \infty$	$\pm \infty$	$\ell \neq 0$ ou $\pm \infty$	0
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	$\ell' \neq 0$	$\pm \infty$	ℓ'	$\pm \infty$	0 (v_n de signe constant)	0
$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n / v_n)$	ℓ / ℓ'	0	$\pm \infty$	F.I.	$\pm \infty$	F.I.

Appliquer les tableaux

- $u_n = 5 + 3/n^2$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3/n^2 = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 5$.
- $u_n = (n + 1)(n^2 - 4)$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n + 1) = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 - 4) = +\infty$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ (produit).
- $u_n = 4/(n + 7)$: le dénominateur tend vers $+\infty$ et le numérateur est constant, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.
- $u_n = 6/(1/n) = 6n$: le dénominateur tend vers 0 en restant positif, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

5. Lever une forme indéterminée

Les quatre formes indéterminées sont : $+\infty - \infty$, $0 \times \infty$, ∞/∞ et $0/0$. Dans ces cas, il faut **transformer l'expression** avant de calculer la limite.

Méthode 1 : factoriser le terme dominant (polynômes)

Pour un polynôme en n , on met en facteur le terme de plus haut degré. Exemple : $u_n = n^2 - 5n$. On a $\infty - \infty$. On écrit $u_n = n^2(1 - 5/n)$. Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - 5/n) = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Règle : la limite d'un polynôme en n est celle de son terme de plus haut degré.

Méthode 2 : fraction rationnelle

On met en facteur, au numérateur et au dénominateur, la plus grande puissance de n . Exemple : $u_n = (3n^2 + n)/(n^2 - 4) = n^2(3 + 1/n) / n^2(1 - 4/n^2) = (3 + 1/n)/(1 - 4/n^2)$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3/1 = 3$.

Règle : la limite d'une fraction rationnelle est celle du quotient des termes de plus haut degré : si les degrés sont égaux, on obtient le quotient des coefficients ; si le degré du numérateur est plus petit, la limite est 0 ; s'il est plus grand, la limite est infinie (signe

par la règle des signes).

Méthode 3 : quantité conjuguée (racines)

Pour $u_n = \sqrt[n]{n+3} - \sqrt[n]{n}$ (forme $+\infty - \infty$), on multiplie et on divise par la quantité conjuguée $\sqrt[n]{n+3} + \sqrt[n]{n}$: $u_n = ((n+3) - n) / (\sqrt[n]{n+3} + \sqrt[n]{n}) = 3/(\sqrt[n]{n+3} + \sqrt[n]{n})$. Le dénominateur tend vers $+\infty$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Piège

On n'écrit jamais « $+\infty - \infty = 0$ » ni « $\infty/\infty = 1$ » : ce sont des formes indéterminées dont la valeur dépend de l'expression. Par exemple $n^2 - n$ et $n - n^2$ sont deux formes $+\infty - \infty$ de limites $+\infty$ et $-\infty$.

6. Comparaison et théorème des gendarmes

Théorème de comparaison

Soit (u_n) et (v_n) deux suites telles que $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang.

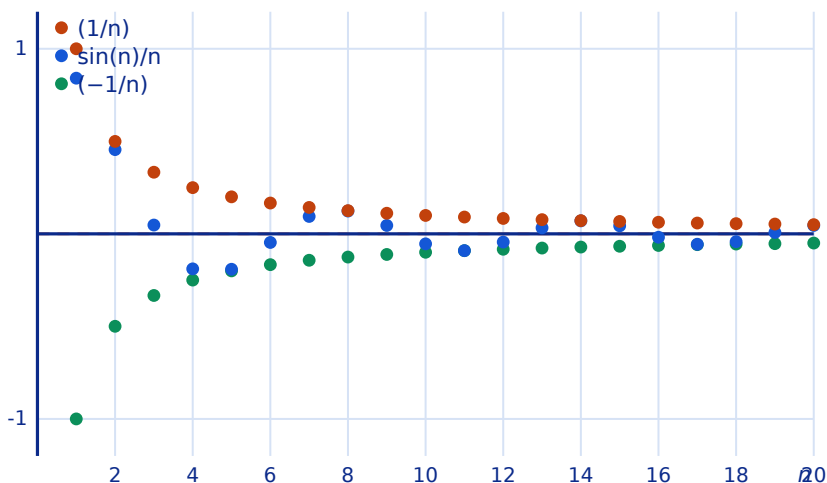
- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.
- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

Démonstration de la première propriété. Soit A un réel. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, il existe p tel que $u_n \geq A$ pour tout $n \geq p$. Il existe aussi n_0 tel que $u_n \leq v_n$ pour $n \geq n_0$. Donc, pour tout $n \geq \max(p ; n_0)$, $v_n \geq u_n \geq A$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.

Théorème des gendarmes

Soit (u_n) , (v_n) , (w_n) trois suites et ℓ un réel. Si, à partir d'un certain rang, $v_n \leq u_n \leq w_n$, et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \ell$, alors (u_n) converge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$.

Les deux « gendarmes » v_n et w_n encadrent la suite (u_n) et la forcent à les suivre vers ℓ .



Deux encadrements typiques

(1) $u_n = n + 2 \sin(n)$. Comme $-1 \leq \sin(n) \leq 1$, on a $u_n \geq n - 2$. Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n - 2) = +\infty$, donc par comparaison $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

(2) $u_n = \sin(n)/n$ pour $n \geq 1$. De $-1 \leq \sin(n) \leq 1$ on tire, en divisant par $n > 0$: $-1/n \leq u_n \leq 1/n$. Les deux bornes tendent vers 0, donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Méthode : utiliser les encadrements

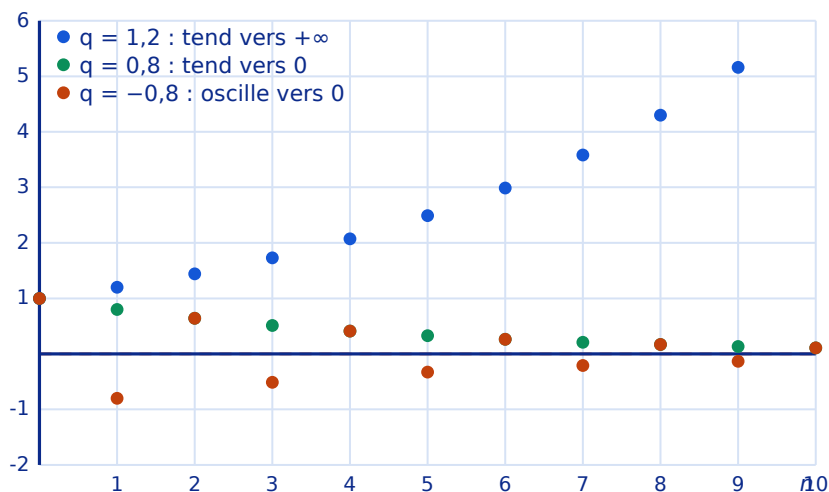
On cherche un encadrement de la partie « gênante » ($\sin$, $\cos$, $(-1)^n$, ...) : $-1 \leq \cos(n) \leq 1$. On multiplie ou on ajoute pour former u_n (attention aux signes lorsque l'on multiplie !), puis on choisit : une seule minoration (ou majoration) si la limite est infinie, deux bornes de même limite si la suite converge.

7. Suites géométriques

Limite de (q^n)

Soit q un réel.

- Si $q > 1$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$.
- Si $q = 1$: la suite est constante égale à 1, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 1$.
- Si $-1 < q < 1$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$.
- Si $q \leq -1$: la suite (q^n) n'a pas de limite.



Démonstration

Cas $q > 1$. On pose $q = 1 + a$ avec $a > 0$. D'après l'inégalité de Bernoulli, $q^n \geq 1 + na$. Comme $a > 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + na) = +\infty$, donc par comparaison $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$.

Cas $0 < q < 1$. Alors $1/q > 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1/q)^n = +\infty$, et $q^n = 1/(1/q)^n$ tend vers 0.

Cas $-1 < q < 0$. On a $|q|^n \rightarrow 0$ d'après le cas précédent, et $-|q|^n \leq q^n \leq |q|^n$: par les gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$.

Limites de suites géométriques

- $u_n = 5 \times (0,6)^n$: $0 < 0,6 < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.
- $u_n = 4 - 3 \times (1/2)^n$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1/2)^n = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4$.
- $u_n = -2 \times 3^n$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n = +\infty$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

Somme des termes d'une suite géométrique

Pour $q \neq 1$: $1 + q + q^2 + \dots + q^n = (1 - q^{n+1})/(1 - q)$. Si $-1 < q < 1$, cette somme tend vers **$1/(1 - q)$** quand n tend vers $+\infty$; si $q \geq 1$, elle tend vers $+\infty$. Exemple : $1 + 1/2 + 1/4 + \dots + 1/2^n = 2 - 1/2^n$ tend vers 2.

Piège

Pour une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 , $u_n = u_0 q^n$. Si $u_0 < 0$ et $q > 1$, la limite est $-\infty$ (et non $+\infty$) : on multiplie la limite de q^n par le signe de u_0 .

8. Suites monotones et suites récurrentes

Théorème de convergence monotone (admis)

- Toute suite **croissante et majorée** converge.
- Toute suite **décroissante et minorée** converge.
- Toute suite croissante non majorée tend vers $+\infty$ (démontré plus haut) ; toute suite décroissante non minorée tend vers $-\infty$.

Attention : le théorème donne l'**existence** de la limite, pas sa valeur. Le majorant n'est pas la limite.

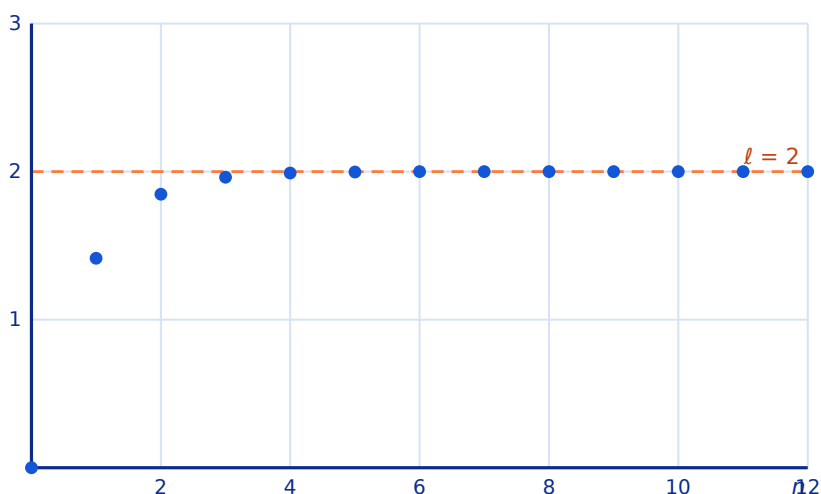
Passage à la limite dans une récurrence

Soit (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f continue. Si (u_n) converge vers ℓ , alors ℓ vérifie $\ell = f(\ell)$. On résout cette équation pour trouver les valeurs possibles de ℓ .

Étude complète

Soit $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$.

- $0 \leq u_n \leq 2$ pour tout n .** Initialisation : $u_0 = 0$. Hérédité : si $0 \leq u_n \leq 2$, alors $2 \leq u_n + 2 \leq 4$, donc $\sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq 2$ (la racine est croissante), donc $0 \leq u_{n+1} \leq 2$.
- (u_n) est croissante.** $u_{n+1} - u_n = (u_n + 2 - u_n^2)/(\sqrt{u_n + 2} + u_n) = (2 - u_n)(1 + u_n)/(\sqrt{u_n + 2} + u_n) \geq 0$, car $0 \leq u_n \leq 2$.
- Convergence.** (u_n) est croissante et majorée par 2 : elle converge vers un réel ℓ .
- Valeur de ℓ .** $\ell = \sqrt{\ell + 2}$, donc $\ell \geq 0$ et $\ell^2 = \ell + 2$, soit $\ell^2 - \ell - 2 = 0$, dont les racines sont -1 et 2 . Comme $\ell \geq 0$, $\ell = 2$.



9. Algorithmes de seuil en Python

Savoir qu'une suite tend vers $+\infty$ garantit qu'elle dépassera n'importe quel seuil ; un algorithme permet de trouver le **premier rang** où cela se produit. On utilise une boucle **while** tant que la condition n'est pas réalisée.

Seuil pour une suite explicite ou récurrente

On veut le plus petit entier n tel que $u_n > 1\,000$ pour $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 1,5 u_n + 1$.

```
def seuil(S):  
    n = 0  
    u = 2  
    while u <= S:  
        u = 1.5 * u + 1  
        n = n + 1  
    return n  
  
print(seuil(1000))
```

La boucle s'arrête dès que $u > S$, et n contient alors le premier rang qui convient. Pour une suite qui tend vers 0 ou vers une limite ℓ , on change la condition (par exemple `while abs(u - 5) >= 0.001`).

Piège

La condition du **while** est celle pour **continuer**, c'est la négation de ce que l'on cherche : pour trouver $u > S$, on écrit `while u <= S`. Pense aussi à vérifier à la main le rang obtenu : u_n doit dépasser le seuil, et u_{n-1} non.

Pour une suite géométrique décroissante comme $u_n = 200 \times 0,9^n$, la boucle `while u >= 5` donne $n = 36$: on a bien $200 \times 0,9^{36} < 5$ alors que $200 \times 0,9^{35} \geq 5$.

À retenir

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$: u_n dépasse tout réel A à partir d'un certain rang ; $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$: u_n finit par rester dans tout intervalle ouvert autour de ℓ .
- Références : $n, n^2, \sqrt{n} \rightarrow +\infty$; $1/n, 1/n^2, 1/\sqrt{n} \rightarrow 0$.
- Un polynôme se comporte comme son terme de plus haut degré ; une fraction rationnelle comme le quotient des termes dominants.
- Formes indéterminées : $+\infty - \infty, 0 \times \infty, \infty/\infty, 0/0$. On factorise, on simplifie ou on utilise la quantité conjuguée.
- Comparaison : $u_n \leq v_n$ et $u_n \rightarrow +\infty \Rightarrow v_n \rightarrow +\infty$. Gendarmes : $v_n \leq u_n \leq w_n, v_n$ et $w_n \rightarrow \ell \Rightarrow u_n \rightarrow \ell$.
- $q > 1$: $q^n \rightarrow +\infty$; $-1 < q < 1$: $q^n \rightarrow 0$; $q \leq -1$: pas de limite.
- Croissante majorée (ou décroissante minorée) $\Rightarrow$ convergente ; la limite ℓ d'une suite $u_{n+1} = f(u_n)$ vérifie $\ell = f(\ell)$.
- Un algorithme de seuil utilise une boucle **while** dont la condition est la négation de

l'objectif.