

Loi binomiale

Corrigé du contrôle - Terminale

Durée conseillée : 45 minutes. Barème sur 20 points. Calculatrice interdite.

1 Reconnaître une loi binomiale / 3 pts

- (1 pt) Oui : tirages avec remise, identiques et indépendants, succès « blanche » de probabilité 0,25. X suit $B(8 ; 0,25)$.
- (1 pt) Non : sans remise, la composition de l'urne change, les tirages ne sont pas indépendants.
- (1 pt) Oui : 40 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, $p = 1/20 = 0,05$. X suit $B(40 ; 0,05)$.

2 Contrôle de fabrication / 5 pts

Calculatrice autorisée.

- (1 pt) Chaque ampoule est une épreuve de Bernoulli (succès « défectueuse », $p = 0,04$), les 25 prélèvements sont identiques et indépendants : X suit $B(25 ; 0,04)$.
- (1 pt) $P(X = 0) = 0,96^{25} \approx 0,360$; $P(X = 1) = 25 \times 0,04 \times 0,96^{24} \approx 0,375$.
- (1,5 pt) $P(X \leq 2) \approx 0,924$; $P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) \approx 0,076$.
- (1,5 pt) $E(X) = 25 \times 0,04 = 1$; $V(X) = 25 \times 0,04 \times 0,96 = 0,96$; $\sigma(X) = \sqrt{0,96} \approx 0,98$.

3 Une loi complète / 3 pts

- (1,5 pt)

k	0	1	2	3	4
$P(X = k)$	0,0256	0,1536	0,3456	0,3456	0,1296

par exemple $P(X = 2) = 6 \times 0,6^2 \times 0,4^2 = 0,3456$.

- (0,5 pt) $0,0256 + 0,1536 + 0,3456 + 0,3456 + 0,1296 = 1$.
- (1 pt) $E(X) = 0 \times 0,0256 + 1 \times 0,1536 + 2 \times 0,3456 + 3 \times 0,3456 + 4 \times 0,1296 = 2,4$, ce qui est bien $4 \times 0,6 = 2,4$.

4 Au moins un succès / 4 pts

Calculatrice autorisée.

- a. (1 pt) X suit $B(n ; 0,08)$ et $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,92^n$.
- b. (2 pts) $1 - 0,92^n \geq 0,98 \Leftrightarrow 0,92^n \leq 0,02 \Leftrightarrow n \ln(0,92) \leq \ln(0,02) \Leftrightarrow n \geq \ln(0,02) \div \ln(0,92) \approx 46,92$ ($\ln(0,92) < 0$: le sens change). Il faut **47 appels**.
- c. (1 pt) La condition de la boucle est $1 - (1 - p)^n < \text{cible}$: on continue tant que l'objectif n'est pas atteint.

5 Concentration / 3 pts

- a. (1 pt) $E(X) = 300 \times 0,5 = 150$; $V(X) = 300 \times 0,5 \times 0,5 = 75$.
- b. (2 pts) $P(|X - 150| \geq 30) \leq 75 \div 900 = \mathbf{1/12}$. L'événement $120 < X < 180$ est le contraire de $|X - 150| \geq 30$, donc $P(120 < X < 180) \geq 1 - \mathbf{1/12} = \mathbf{11/12} \approx 0,917$.

6 Gain d'un jeu / 2 pts

- a. (1 pt) X suit $B(3 ; 0,4)$: $E(X) = 1,2$; $E(G) = 5 \times 1,2 - 4 = 2$ €.
- b. (1 pt) $G > 0 \Leftrightarrow 5X > 4 \Leftrightarrow X \geq 1$. $P(X \geq 1) = 1 - 0,6^3 = 1 - 0,216 = 0,784$.