

Loi binomiale

Corrigé des exercices - Terminale

Corrigé détaillé des exercices du chapitre. Vérifie tes réponses étape par étape et corrige-toi.

1 Bernoulli ou pas ? ★★★

- Oui : épreuves identiques et indépendantes à deux issues. $n = 12$, succès « obtenir 6 », $p = 1/6$.
- Non : sans remise, la probabilité d'obtenir un cœur change d'un tirage à l'autre (8/32, puis 7/31 ou 8/31...) : les tirages ne sont pas indépendants.
- Oui : $n = 15$, succès « bonne réponse », $p = 0,25$ (réponses indépendantes au hasard).
- Non : chaque lancer a six issues, pas deux. On pourrait en faire un schéma de Bernoulli en choisissant un succès (par exemple « obtenir un nombre pair »), mais ce n'est pas l'expérience décrite.

2 Coefficients binomiaux ★★★

$$C(7 ; 2) = (7 \times 6) \div (2 \times 1) = 42 \div 2 = 21.$$

$$C(9 ; 3) = (9 \times 8 \times 7) \div (3 \times 2 \times 1) = 504 \div 6 = 84.$$

$$C(10 ; 8) = C(10 ; 2) \text{ par symétrie} = (10 \times 9) \div 2 = 45.$$

$$\text{Pascal : } C(7 ; 2) = C(6 ; 1) + C(6 ; 2) = 6 + 15 = 21. \text{ On retrouve bien 21.}$$

3 QCM au hasard ★★★

- Chaque question est une épreuve de Bernoulli : succès « bonne réponse », $p = 1/4 = 0,25$. Les 12 réponses sont données au hasard, donc indépendantes. X suit $B(12 ; 0,25)$.
- $P(X = 3) = C(12 ; 3) \times 0,25^3 \times 0,75^9 = 220 \times 0,25^3 \times 0,75^9 \approx 0,258$.
- $E(X) = 12 \times 0,25 = 3$ bonnes réponses en moyenne.

4 Lancers de pièce ★★★

- X suit $B(6 ; 0,5)$.
- $P(X = 2) = C(6 ; 2) \times 0,5^6 = 15 \div 64 = 15/64$.

- c. $P(X = 3) = C(6 ; 3) \times 0,5^6 = 20 \div 64 = \mathbf{5/16}$.
d. $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \mathbf{1/64} = \mathbf{63/64}$.

5 Espérance, variance, écart type ★★★

$B(40 ; 0,25) : E = 10 ; V = 40 \times 0,25 \times 0,75 = 7,5 ; \sigma = \sqrt{7,5} \approx 2,74$.

$B(100 ; 0,02) : E = 2 ; V = 100 \times 0,02 \times 0,98 = 1,96 ; \sigma = \sqrt{1,96} = 1,4$.

$B(50 ; 0,9) : E = 45 ; V = 50 \times 0,9 \times 0,1 = 4,5 ; \sigma = \sqrt{4,5} \approx 2,12$.

6 Lire deux diagrammes ★★★

- a. $E(X) = 10 \times 0,2 = 2$ pour la première loi : le diagramme A, concentré à gauche, correspond à $B(10 ; 0,2)$. Le diagramme B ($E = 8$) correspond à $B(10 ; 0,8)$.
b. Mode : partie entière de $11 \times 0,2 = 2,2$, soit 2 ; et partie entière de $11 \times 0,8 = 8,8$, soit 8.
c. Ils sont égaux : $C(10 ; k) 0,2^k 0,8^{10-k} = C(10 ; 10 - k) 0,8^{10-k} 0,2^k$ par symétrie des coefficients. Les diagrammes sont symétriques par rapport à $k = 5$.

7 Au moins un ★★★

X (nombre de réussites) suit $B(5 ; 0,1)$. $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,9^5 = 1 - 0,59049 \approx 0,410$.

8 Contrôle qualité ★★★

- a. X suit $B(30 ; 0,02)$.
b. $P(X = 0) = 0,98^{30} \approx 0,545$. $P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \approx 0,545 + 0,334 + 0,099 \approx 0,978$ (calculatrice : répartition en 2).
c. $P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) \approx 0,022$.

9 Tir à l'arc ★★★

- a. X suit $B(10 ; 0,7)$.
b. $P(X \geq 8) = 1 - P(X \leq 7) \approx 1 - 0,617 \approx 0,383$.
c. $P(5 \leq X \leq 8) = P(X \leq 8) - P(X \leq 4) \approx 0,851 - 0,047 \approx 0,803$.
d. $E(X) = 7 ; V(X) = 10 \times 0,7 \times 0,3 = 2,1 ; \sigma(X) = \sqrt{2,1} \approx 1,45$.

10 Vrai ou faux ★★★

- a. Vrai : $20 \times 0,4 = 8$.

- b. Faux : $P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 4)$. L'événement « $X \leq 5$ » contient encore la valeur 5.
- c. Vrai : X prend des valeurs entières, donc $X < 3$ équivaut à $X \leq 2$.
- d. Vrai : $20 \times 0,4 \times 0,6 = 4,8$.
- e. Vrai : $C(20 ; 20) = 1$, donc $P(X = 20) = 1 \times 0,4^{20} \times 0,6^0 = 0,4^{20}$.

11 Sondage dans une grande ville ★★★

- a. Chaque personne interrogée est un succès (« possède un vélo ») avec la probabilité 0,3 ; l'échantillon est petit devant la population, donc les 20 interrogations sont assimilées à des épreuves identiques et indépendantes. X suit $B(20 ; 0,3)$.
- b. $P(X = 6) = C(20 ; 6) \times 0,3^6 \times 0,7^{14} \approx 0,192$.
- c. $P(X \geq 10) = 1 - P(X \leq 9) \approx 1 - 0,952 \approx 0,048$.
- d. $E(X) = 20 \times 0,3 = 6$ cyclistes.

12 Un jeu de dé ★★★

- a. X suit $B(5 ; 1/6)$ et $E(X) = 5 \times 1/6 = 5/6$.
- b. $G = 6X - 4$, donc $E(G) = 6 \times 5/6 - 4 = 5 - 4 = 1$ €.
- c. $E(G) = 1 > 0$: en moyenne le joueur gagne 1 € par partie, le jeu lui est favorable.
- d. $P(X = 0) = (5/6)^5 = 3125/7776 \approx 0,402$.

13 Valeur la plus probable ★★★

- a. $P(X = k + 1) \div P(X = k) = [C(20 ; k+1) \div C(20 ; k)] \times 0,3 \div 0,7$, et $C(20 ; k+1) \div C(20 ; k) = (20 - k) \div (k + 1)$. On obtient $(20 - k) \times 0,3 \div ((k + 1) \times 0,7)$.
- b. Rapport $\geq 1 \Leftrightarrow 0,3(20 - k) \geq 0,7(k + 1) \Leftrightarrow 6 - 0,3k \geq 0,7k + 0,7 \Leftrightarrow 5,3 \geq k$. Donc pour $k \leq 5$, $P(X = k + 1) \geq P(X = k)$.
- c. Les probabilités croissent jusqu'à $k + 1 = 6$, puis décroissent : le mode est **6** (= partie entière de $21 \times 0,3 = 6,3$). Calculatrice : $P(X = 5) \approx 0,1789$; $P(X = 6) \approx 0,1916$; $P(X = 7) \approx 0,1643$.

14 Combien de tentatives ? ★★★

Soit n le nombre d'essais et X le nombre de réussites : X suit $B(n ; 0,12)$. $P(X \geq 1) = 1 - 0,88^n$. On veut $1 - 0,88^n \geq 0,99$, soit $0,88^n \leq 0,01$.

Par croissance de $\ln$: $n \ln(0,88) \leq \ln(0,01)$. Comme $\ln(0,88) < 0$, on divise en changeant le sens : $n \geq \ln(0,01) \div \ln(0,88) \approx 36,02$.

Il faut donc **37 essais** au minimum. Contrôle : $1 - 0,88^{36} \approx 0,9900 < 0,99$ et $1 - 0,88^{37} \approx 0,9912 \geq 0,99$.

15 Lire un programme ★★★

- a. f calcule $P(X = k)$ et g calcule $P(X \leq k)$, pour X suivant $B(n ; p)$.
- b. Première ligne : $P(X = 2) = 6 \times 0,5^4 = 0,375$. Seconde : $1 - P(X \leq 1) = P(X \geq 2) = 1 - (0,0625 + 0,25) = 0,6875$.
- c. $P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2)$: on écrit `print(1 - g(4, 0.5, 2))`, ce qui affiche 0,3125.

16 Deux seuils ★★★

- a. $1 - 0,85^n \geq 0,99 \Leftrightarrow 0,85^n \leq 0,01 \Leftrightarrow n \geq \ln(0,01) \div \ln(0,85) \approx 28,34$. Il faut **29** échantillons.
- b. On cherche le plus petit n tel que $1 - 0,9^n - n \times 0,1 \times 0,9^{n-1} \geq 0,9$. Un tableau de valeurs donne : pour $n = 37$, $P(X \geq 2) \approx 0,8964$; pour $n = 38$, $P(X \geq 2) \approx 0,9047$. Il faut **38** échantillons.

17 Somme des probabilités ★★★

- a. $P(X = 0) = q^3$; $P(X = 1) = 3pq^2$; $P(X = 2) = 3p^2q$; $P(X = 3) = p^3$.
- b. La somme est $q^3 + 3pq^2 + 3p^2q + p^3 = (p + q)^3$ (développement du cube d'une somme) $= 1^3 = 1$.
- c. $E(X) = 0 + 3pq^2 + 2 \times 3p^2q + 3p^3 = 3p(q^2 + 2pq + p^2) = 3p(p + q)^2 = 3p$. On retrouve np avec $n = 3$.

18 Intervalle de fluctuation ★★★

- a. $P(X \leq 21) \approx 0,0137 \leq 0,025$ et $P(X \leq 22) \approx 0,0259 > 0,025$: $a = 22$.
- b. $P(X \leq 37) \approx 0,9741 < 0,975$ et $P(X \leq 38) \approx 0,9863 \geq 0,975$: $b = 38$.
- c. Intervalle $[22 ; 38]$, et $P(22 \leq X \leq 38) = P(X \leq 38) - P(X \leq 21) \approx 0,9727 \geq 0,95$.
- d. 42 n'appartient pas à $[22 ; 38]$: si la pièce était équilibrée, un tel résultat aurait moins de 5 % de chances de se produire. Au seuil de 95 %, on met en doute l'équilibre de la pièce.

19 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev ★★★

- a. $E(X) = 200 \times 0,5 = 100$; $V(X) = 200 \times 0,5 \times 0,5 = 50$.
- b. $P(|X - 100| \geq 20) \leq 50 \div 20^2 = 50 \div 400 = 0,125$.
- c. L'événement $80 < X < 120$ est le contraire de $|X - 100| \geq 20$: sa probabilité est $\geq 1 - 0,125 = 0,875$.
- d. $P(81 \leq X \leq 119) = P(X \leq 119) - P(X \leq 80) \approx 0,9943$. Le minorant 0,875 est correct mais très en dessous de la valeur exacte : l'inégalité est une garantie, pas une estimation précise.

20 Surréservation ★★★

- a. Chaque billet est une épreuve de Bernoulli (succès : « le passager se présente », $p = 0,93$) et les présences sont supposées indépendantes : X suit $B(125 ; 0,93)$. $E(X) = 125 \times 0,93 = 116,25$; $V(X) = 125 \times 0,93 \times 0,07 = 8,1375$; $\sigma \approx 2,85$.
- b. $P(X > 120) = P(X \geq 121) = 1 - P(X \leq 120) \approx 1 - 0,9424 \approx 0,0576$.
- c. $0,0576 > 0,05$: la condition n'est pas respectée.

21 Un test à choix multiples ★★★

- a. X suit $B(20 ; 0,25)$; $E(X) = 5$; $V(X) = 20 \times 0,25 \times 0,75 = 3,75$; $\sigma \approx 1,94$.
- b. $P(X \geq 10) = 1 - P(X \leq 9) \approx 1 - 0,9861 \approx 0,0139$.
- c. Y suit $B(14 ; 0,25)$. Il lui faut au moins 4 bonnes réponses sur les 14 pour atteindre 10 au total : $P(Y \geq 4) = 1 - P(Y \leq 3) \approx 1 - 0,5213 \approx 0,4787$. Savoir 6 réponses fait passer la probabilité de moins de 1 % à plus de 50 %.

22 Dispersion et valeur de p ★★★

- a. $\sigma(0,1) = \sqrt{50 \times 0,1 \times 0,9} = \sqrt{4,5} \approx 2,12$; $\sigma(0,5) = \sqrt{12,5} \approx 3,54$; $\sigma(0,9) = \sqrt{4,5} \approx 2,12$.
- b. $\frac{1}{4} - p(1 - p) = p^2 - p + \frac{1}{4} = (p - \frac{1}{2})^2 \geq 0$. Donc $p(1 - p) \leq \frac{1}{4}$, avec égalité exactement quand $p = \frac{1}{2}$.
- c. $V(X) = np(1 - p) \leq n \div 4$, donc $\sigma(X) \leq \sqrt{n} \div 2$. Pour $n = 50$: $\sqrt{50} \div 2 \approx 3,54$, valeur atteinte pour $p = 0,5$ (cf. a.).

23 Pièce équilibrée et triangle de Pascal ★★★

- a. X suit $B(10 ; 0,5)$. $P(X = k) = C(10 ; k) \times 0,5^k \times 0,5^{10-k} = C(10 ; k) \times 0,5^{10} = C(10 ; k) \div 1024$.
- b. $P(X = 5) = 252 \div 1024 = \frac{63}{256} \approx 0,246$. Par symétrie $C(10 ; 7) = 120$ et $C(10 ; 6) = 210$, d'où $P(3 \leq X \leq 7) = (120 + 210 + 252 + 210 + 120) \div 1024 = 912 \div 1024 = \frac{57}{64} \approx 0,891$.
- c. Les événements $\{X = k\}$ forment une partition de l'univers, donc la somme des probabilités vaut 1 : $(\text{somme des } C(10 ; k)) \div 1024 = 1$.