

Loi binomiale

Cours de maths - Terminale

Sur dix lancers francs, combien de paniers ? Dans un lot de 50 pièces, combien de défectueuses ? Parmi 1 000 personnes interrogées, combien préfèrent la même marque ? Dans chaque cas, on répète **la même expérience aléatoire à deux issues** et on compte les succès. La **loi binomiale** est l'outil qui permet de calculer toutes les probabilités associées. En Terminale, tu la maîtrises à fond : formule, calculatrice, Python, espérance et variance, seuils et intervalles de probabilité.

1. Épreuve et schéma de Bernoulli (rappels)

Épreuve de Bernoulli

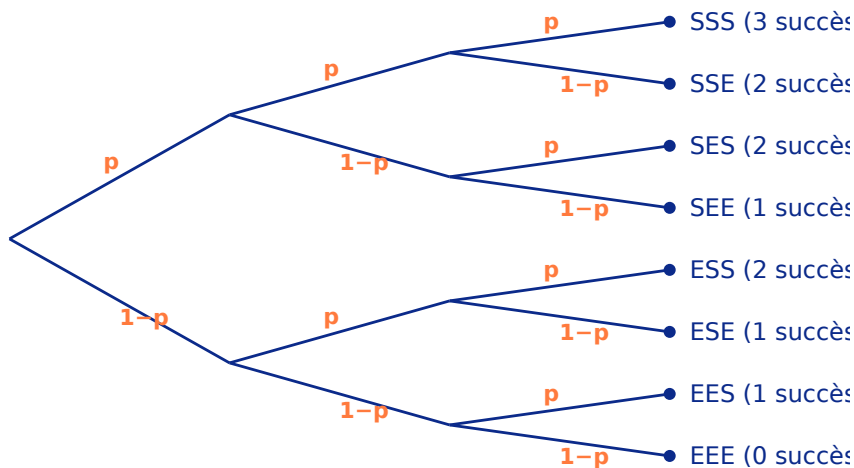
Une épreuve de Bernoulli de paramètre p ($0 \leq p \leq 1$) est une expérience aléatoire qui n'a que **deux issues** : le **succès** S , de probabilité p , et l'**échec** $E = \bar{S}$, de probabilité $1 - p$.

Schéma de Bernoulli

Un schéma de Bernoulli de paramètres n et p est la répétition de n épreuves de Bernoulli de même paramètre p , **identiques et indépendantes**. Une issue du schéma est une liste de n résultats, par exemple SEESE pour $n = 5$.

Exemple

Une basketteuse réussit un lancer franc avec la probabilité 0,6, quel que soit le lancer. Elle en tire trois. Chaque lancer est une épreuve de Bernoulli (succès : « le panier est marqué », $p = 0,6$) et les trois lancers sont indépendants. L'arbre ci-dessous montre les 8 issues possibles.



Par indépendance, la probabilité d'une issue est le **produit** des probabilités le long de la branche. Pour SES : $0,6 \times 0,4 \times 0,6 = 0,144$. Toute issue à 2 succès et 1 échec a la même probabilité, quel que soit l'ordre : $0,6^2 \times 0,4 = 0,144$.

2. Coefficients binomiaux

Coefficient binomial

Pour $0 \leq k \leq n$, le coefficient binomial $C(n ; k)$ (« k parmi n », noté aussi avec n au-dessus de k) est le **nombre de chemins** de l'arbre d'un schéma de Bernoulli à n épreuves qui réalisent exactement k succès. Autrement dit, c'est le nombre de façons de choisir les k positions des succès parmi les n épreuves.

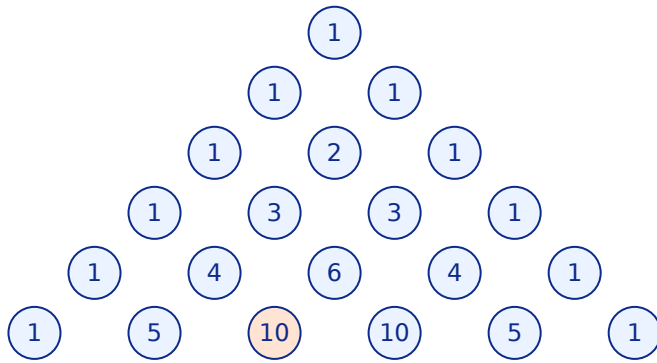
Propriétés

- $C(n ; 0) = C(n ; n) = 1$ et $C(n ; 1) = C(n ; n - 1) = n$.
- **Symétrie** : $C(n ; k) = C(n ; n - k)$.
- **Relation de Pascal** : $C(n ; k) + C(n ; k + 1) = C(n + 1 ; k + 1)$.
- $C(n ; k) = n! \div (k! \times (n - k)!)$, avec $n! = 1 \times 2 \times \dots \times n$.
- Somme d'une ligne : $C(n ; 0) + C(n ; 1) + \dots + C(n ; n) = 2^n$.

La relation de Pascal se comprend sur l'arbre : pour avoir $k + 1$ succès en $n + 1$ épreuves, soit la dernière épreuve est un succès (il faut alors k succès avant : $C(n ; k)$ chemins), soit c'est un échec (il faut $k + 1$ succès avant : $C(n ; k + 1)$ chemins). Elle construit le triangle de Pascal.

$n = 0$

$n = 5$



Exemple

$C(5 ; 2) = 5! \div (2! \times 3!) = (5 \times 4) \div (2 \times 1) = 10$, valeur entourée dans le triangle.
Vérification avec Pascal : $C(4 ; 1) + C(4 ; 2) = 4 + 6 = 10$.

Astuce calculatrice

Sur la calculatrice, $C(n ; k)$ s'obtient avec la touche « nCr » (Casio, TI) ou « binomial(n, k) » (NumWorks). En Python : `from math import comb` puis `comb(n, k)`.

3. La loi binomiale $B(n ; p)$

Loi binomiale

On répète n fois, de façon identique et indépendante, une épreuve de Bernoulli de paramètre p . La variable aléatoire X qui compte le **nombre de succès** suit la **loi binomiale de paramètres n et p** , notée $B(n ; p)$. Ses valeurs possibles sont 0, 1, ..., n .

Théorème

Si X suit $B(n ; p)$, alors pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$:

$$P(X = k) = C(n ; k) \times p^k \times (1 - p)^{n-k}$$

Démonstration. Dans l'arbre du schéma de Bernoulli, un chemin qui comporte exactement k succès et $n - k$ échecs a pour probabilité $p^k(1 - p)^{n-k}$ (produit le long de la branche, épreuves indépendantes). Il y a $C(n ; k)$ chemins de ce type, et ils correspondent à des événements deux à deux incompatibles. On additionne leurs probabilités, d'où la formule.

Exemple résolu

Reprenons la basketteuse ($p = 0,6$, $n = 3$) et notons X le nombre de paniers : X suit $B(3 ; 0,6)$.

$$P(X = 2) = C(3 ; 2) \times 0,6^2 \times 0,4 = 3 \times 0,36 \times 0,4 = 0,432.$$

$$P(X = 3) = 0,6^3 = 0,216 ; P(X = 0) = 0,4^3 = 0,064.$$

Piège

N'oublie pas le coefficient $C(n ; k)$: sans lui, tu ne comptes qu'**un seul** chemin. Et n'écris jamais $(1 - p)^k$ à la place de $(1 - p)^{n-k}$: l'exposant des échecs est $n - k$.

Comme les événements $\{X = 0\}$, ..., $\{X = n\}$ forment une partition de l'univers, la somme des probabilités vaut 1. C'est exactement la formule du binôme : $(p + (1 - p))^n = 1$.

4. Reconnaître et justifier une loi binomiale

Méthode : justifier que X suit une loi binomiale

1. Identifier l'**épreuve** répétée et ses deux issues : définir clairement le **succès** et sa probabilité p .
2. Vérifier que les n répétitions sont **identiques** (même p à chaque fois) et **indépendantes**.
3. Conclure : « X , nombre de succès, suit la loi $B(n ; p)$ avec $n = \dots$ et $p = \dots$ ».

Exemple

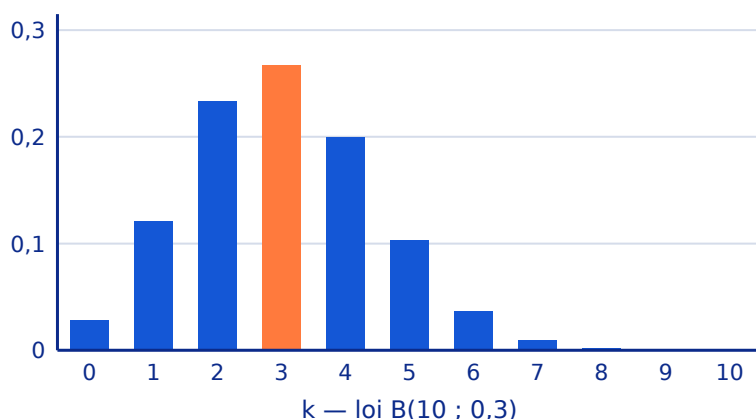
Une urne contient 3 boules rouges et 7 noires. On tire 8 boules **avec remise**. Le succès « tirer une rouge » a pour probabilité 0,3 à chaque tirage, les tirages sont indépendants grâce à la remise : le nombre de boules rouges suit $B(8 ; 0,3)$. **Sans remise**, la composition de l'urne change : les tirages ne sont plus indépendants et la loi n'est pas binomiale.

Piège : population très grande

Quand on prélève un petit échantillon dans une très grande population (un lot de 20 pièces dans une production de 100 000), le tirage sans remise est **assimilé** à un tirage avec remise : la proportion change de façon négligeable. On dit alors « on assimile à un schéma de Bernoulli », et l'énoncé le précise.

Observe l'allure des diagrammes en bâtons : pour $p = 0,3$ et $n = 10$, la loi est « penchée » vers la gauche, avec un maximum en $k = 3$. Le diagramme de $B(10 ; 0,7)$ serait son

symétrique par rapport à $k = 5$.



Position du maximum

Pour $0 \leq k < n$, le rapport $P(X = k + 1) \div P(X = k)$ vaut $(n - k)p \div ((k + 1)(1 - p))$. Les probabilités augmentent tant que ce rapport dépasse 1, c'est-à-dire tant que $k + 1 \leq (n + 1)p$. Le **mode** (valeur la plus probable) est donc la partie entière de $(n + 1)p$.

5. Calculer des probabilités : $P(X = k)$, $P(X \leq k)$ et autres

La calculatrice donne deux fonctions : la **densité** $P(X = k)$ (« BinomialPD » ou « binomFdp » ou « binomial_pdf ») et la **répartition** $P(X \leq k)$ (« BinomialCD » ou « binomFRép »). Il faut savoir ramener toute probabilité à ces deux-là.

Probabilité cherchée	Écriture avec $P(X \leq k)$
$P(X < k)$	$P(X \leq k - 1)$
$P(X \geq k)$	$1 - P(X \leq k - 1)$
$P(X > k)$	$1 - P(X \leq k)$
$P(a \leq X \leq b)$	$P(X \leq b) - P(X \leq a - 1)$

Exemple résolu

X suit $B(10 ; 0,3)$. Valeurs arrondies au millième :

- $P(X = 2) = C(10 ; 2) \times 0,3^2 \times 0,7^8 = 45 \times 0,09 \times 0,7^8 \approx 0,233$.
- $P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \approx 0,383$.
- $P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) \approx 0,617$.
- $P(2 \leq X \leq 5) = P(X \leq 5) - P(X \leq 1) \approx 0,803$.

Méthode : le même calcul en Python

```
from math import comb
```

```
def proba(n, p, k):
    return comb(n, k) * p**k * (1 - p)**(n - k)

def repartition(n, p, k):
    total = 0
    for i in range(k + 1):
        total = total + proba(n, p, i)
    return total

print(proba(10, 0.3, 4))
print(repartition(10, 0.3, 4))
```

Ce programme affiche $P(X = 4) \approx 0,2001$ puis $P(X \leq 4) \approx 0,8497$ pour X suivant $B(10 ; 0,3)$.

Piège : strict ou large ?

« Au moins 3 » signifie $X \geq 3$; « plus de 3 » signifie $X > 3$, soit $X \geq 4$. Traduis toujours l'énoncé en inégalité avant de calculer, et pour un complémentaire, n'oublie pas de **décaler d'un cran** : $P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2)$.

6. Espérance, variance et écart type

Théorème

Si X suit $B(n ; p)$, alors :

- $E(X) = np$;
- $V(X) = np(1 - p)$;
- $\sigma(X) = \sqrt{np(1 - p)}$.

Démonstration de $E(X) = np$. On pose $q = 1 - p$. Par définition, $E(X) = \sum k C(n ; k) p^k q^{n-k}$ (somme pour k de 0 à n). Le terme $k = 0$ est nul. Pour $k \geq 1$, on utilise $k C(n ; k) = n C(n - 1 ; k - 1)$ (vérifie avec les factorielles). Ainsi $E(X) = np \times \sum C(n - 1 ; k - 1) p^{k-1} q^{(n-1)-(k-1)}$, avec $k - 1$ allant de 0 à $n - 1$. La somme est celle des probabilités de la loi $B(n - 1 ; p)$: elle vaut 1. Donc $E(X) = np$.

Pour la variance (admise), on écrit $X = X_1 + \dots + X_n$, où chaque X_i vaut 1 en cas de succès et 0 sinon. Chaque X_i a pour espérance p et pour variance $p(1 - p)$; les X_i sont indépendantes, donc les variances s'ajoutent : $V(X) = np(1 - p)$.

Exemple résolu

Fiche en ligne : maths-facile.eu/loi-binomiale-cours-terminale/ · Cours, exercices et contrôles corrigés sur maths-facile.eu · page 6/10

Un joueur réussit un coup franc avec la probabilité 0,8 et en tente 25 : X suit $B(25 ; 0,8)$. $E(X) = 25 \times 0,8 = 20$ paniers en moyenne ; $V(X) = 25 \times 0,8 \times 0,2 = 4$; $\sigma(X) = \sqrt{4} = 2$.

À savoir

Si $Y = aX + b$, alors $E(Y) = aE(X) + b$ et $V(Y) = a^2V(X)$. Pratique pour un gain : un jeu à n parties où chaque succès rapporte a euros pour une mise totale m a pour gain $G = aX - m$.

La variance $np(1 - p)$ est maximale pour $p = 0,5$, car $p(1 - p) \leq 1/4$ (la quantité $1/4 - p(1 - p)$ vaut $(p - 0,5)^2$, toujours positive). Un schéma « équilibré » est donc le plus dispersé.

7. « Au moins un succès » et recherche de seuil

Propriété

Si X suit $B(n ; p)$, alors $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (1 - p)^n$. Cette probabilité augmente avec n et tend vers 1.

Méthode : trouver le plus petit n tel que $P(X \geq 1) \geq 0,95$

Chaque pièce d'une machine est défectueuse avec la probabilité 0,05. Combien de pièces faut-il contrôler pour avoir au moins 95 % de chances de trouver au moins une défectueuse ?

1. On traduit : $1 - 0,95^n \geq 0,95$, soit $0,95^n \leq 0,05$.
2. On applique le logarithme népérien (fonction croissante) : $n \ln(0,95) \leq \ln(0,05)$.
3. Comme $\ln(0,95) < 0$, on **change le sens** : $n \geq \ln(0,05) \div \ln(0,95) \approx 58,40$.
4. Conclusion : il faut au minimum **59** pièces.

On peut aussi chercher le seuil par tâtonnement à la calculatrice (tableau de valeurs) ou avec un programme :

```
def seuil(p, cible):  
    n = 1  
    while 1 - (1 - p)**n < cible:  
        n = n + 1  
    return n  
  
print(seuil(0.05, 0.95))
```

Ce programme renvoie 59. Vérifions : $1 - 0,95^{58} \approx 0,949 < 0,95$ et $1 - 0,95^{59} \approx 0,952 \geq 0,95$.

Piège

En résolvant une inéquation avec $\ln(1 - p)$, souviens-toi que ce logarithme est **négatif** : on divise par un négatif, donc le sens de l'inégalité s'inverse.

8. Intervalle de probabilité, fluctuation et concentration

Quand X suit $B(n ; p)$, les valeurs de X « raisonnables » se concentrent autour de $E(X)$. Un **intervalle de fluctuation** au seuil de 95 % est un intervalle $[a ; b]$ d'entiers tel que $P(a \leq X \leq b) \geq 0,95$.

Méthode : déterminer l'intervalle de fluctuation

1. a est le plus petit entier tel que $P(X \leq a) > 0,025$.
2. b est le plus petit entier tel que $P(X \leq b) \geq 0,975$.
3. On a alors $P(a \leq X \leq b) \geq 0,95$.

On balaie les valeurs de k avec un tableau de valeurs de la calculatrice ou une boucle Python.

Exemple

Pour X suivant $B(100 ; 0,5)$, on trouve $a = 40$ et $b = 60$. Ainsi $P(40 \leq X \leq 60) \approx 0,965 \geq 0,95$: sur 100 lancers d'une pièce équilibrée, il est très probable d'obtenir entre 40 et 60 « face ». Obtenir 70 « face » serait donc très surprenant.

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev (admise)

Pour tout réel $\delta > 0$: $P(|X - E(X)| \geq \delta) \leq V(X) \div \delta^2$. Elle donne un **majorant** sans calculer la loi exacte.

Exemple

X suit $B(100 ; 0,5)$: $E(X) = 50$, $V(X) = 25$. Avec $\delta = 15$: $P(|X - 50| \geq 15) \leq 25 \div 225 = \mathbf{1/9} \approx 0,111$. Donc $P(35 < X < 65) \geq 1 - \mathbf{1/9} = \mathbf{8/9} \approx 0,889$. La valeur exacte, $P(36 \leq X \leq 64) \approx 0,9965$, est bien supérieure : l'inégalité est valable mais peu fine.

Mathbot

Salut, je suis Mathbot ! Retiens ce réflexe : le **coefficient binomial** compte les chemins, la **puissance** donne leur probabilité, et le **complémentaire** te sauve dès que tu lis « au moins ».

9. Simuler et programmer une loi binomiale

On peut simuler X en répétant n fois une épreuve de Bernoulli avec `random.random()`, qui renvoie un nombre aléatoire de $[0 ; 1[$. Avec N simulations, la fréquence observée d'un événement s'approche de sa probabilité (loi des grands nombres).

```
import random

def binomiale(n, p):
    s = 0
    for i in range(n):
        if random.random() < p:
            s = s + 1
    return s

N = 10000
compteur = 0
for j in range(N):
    if binomiale(20, 0.4) >= 10:
        compteur = compteur + 1
print(compteur / N)
```

Ce programme estime $P(X \geq 10)$ pour X suivant $B(20 ; 0,4)$. La vraie valeur est $\approx 0,245$: la simulation s'en approche, sans jamais être exacte, et deux exécutions donnent des résultats légèrement différents.

À retenir

- Schéma de Bernoulli : n épreuves à deux issues, identiques et **indépendantes**, de probabilité de succès p .
- X = nombre de succès suit $B(n ; p)$ et $P(X = k) = C(n ; k) p^k (1 - p)^{n-k}$.
- $C(n ; k) = n! \div (k!(n - k)!)$; symétrie ; relation de Pascal ; somme d'une ligne = 2^n .
- Sans remise dans une petite population, la loi n'est **pas** binomiale.
- Tout se ramène à $P(X \leq k) : P(X \geq k) = 1 - P(X \leq k - 1)$.
- $E(X) = np$, $V(X) = np(1 - p)$, $\sigma(X) = \sqrt{np(1 - p)}$.
- $P(X \geq 1) = 1 - (1 - p)^n$; seuil par logarithme (attention au sens de l'inégalité), tableau ou Python.
- Intervalle de fluctuation à 95 % : a = plus petit entier avec $P(X \leq a) > 0,025$, b = plus

Fiche en ligne : maths-facile.eu/loi-binomiale-cours-terminale/ · Cours, exercices et contrôles corrigés sur **maths-**

petit entier avec $P(X \leq b) \geq 0,975$.

- Bienaymé-Tchebychev : $P(|X - E(X)| \geq \delta) \leq V(X) \div \delta^2$.