

Nombres et calculs

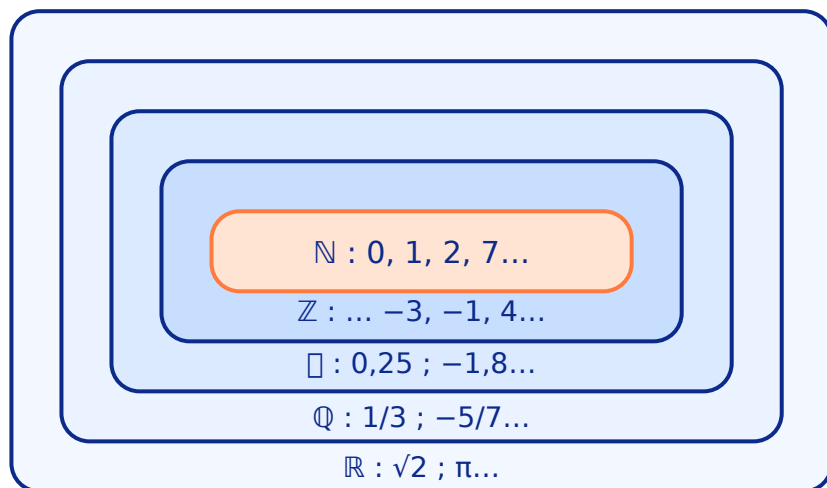
Cours de maths - 2de

En 2de, on ne se contente plus de calculer : on **justifie** et on **démontre**. Dans ce chapitre, tu vas ranger les nombres dans leurs ensembles, maîtriser les puissances et la notation scientifique, travailler avec les racines carrées et leurs valeurs exactes, puis explorer le monde des multiples, des diviseurs et des nombres premiers. Ce sont les outils de base de toute l'année.

1. Les ensembles de nombres

Les mathématiciens rangent les nombres dans des « familles » de plus en plus grandes.

Symbole	Nom	Exemples
$\mathbb{N}$	entiers naturels	0, 1, 2, 3, 150...
$\mathbb{Z}$	entiers relatifs	-8, 0, 5...
$\mathbb{D}$	nombres décimaux	ceux qui s'écrivent avec un nombre fini de chiffres après la virgule : 2,75 ; -0,004
$\mathbb{Q}$	nombres rationnels	quotients d'un entier par un entier non nul : $\frac{2}{3}$; $-\frac{7}{4}$; 5
$\mathbb{R}$	nombres réels	tous les nombres de la droite graduée, dont $\sqrt{2}$ et π



Inclusions

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Chaque ensemble est contenu dans le suivant : un entier naturel est aussi relatif, décimal, rationnel et réel. Pour un nombre, on cherche le **plus petit** ensemble qui le contient.

Notations

« $a \in \mathbb{Q}$ » se lit « a appartient à $\mathbb{Q}$ ». « $a \notin \mathbb{N}$ » : a n'appartient pas à $\mathbb{N}$. « $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ » : $\mathbb{N}$ est inclus dans $\mathbb{Z}$. On note $\mathbb{R}^*$ l'ensemble des réels privés de 0, et $\mathbb{N}^*$ celui des entiers naturels non nuls.

Exemple

$-12 \in \mathbb{Z}$ mais $-12 \notin \mathbb{N}$. $0,375 \in \mathbb{Q}$. $\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$ mais $\frac{1}{3} \notin \mathbb{Z}$ car son écriture décimale $0,333\dots$ ne s'arrête jamais. $\sqrt{16} = 4 \in \mathbb{N}$. $\sqrt{5} \in \mathbb{R}$ mais $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$: on dit que $\sqrt{5}$ est **irrationnel**.

Reconnaître un décimal

Une fraction irréductible $\frac{a}{b}$ est un nombre décimal si et seulement si son dénominateur b n'a pas d'autre facteur premier que 2 ou 5. Ainsi $\frac{7}{40} \in \mathbb{Q}$ ($40 = 2^3 \times 5$) mais $\frac{7}{12} \notin \mathbb{Q}$ (12 contient le facteur 3).

$\sqrt{2}$ est irrationnel (démonstration par l'absurde)

Supposons que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ avec p et q entiers, fraction irréductible. Alors $p^2 = 2q^2$, donc p^2 est pair, donc p est pair : $p = 2k$. Alors $4k^2 = 2q^2$, soit $q^2 = 2k^2$, donc q est pair aussi. Mais alors p et q sont tous deux pairs : la fraction n'était pas irréductible. Contradiction : $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

2. Calculs avec les fractions

Un rationnel a une infinité d'écritures fractionnaires ; on utilise de préférence la **forme irréductible**.

Méthode : calculer avec des fractions

1. Addition ou soustraction : réduire au même dénominateur (un multiple commun, de préférence le plus petit).
2. Multiplication : multiplier numérateurs entre eux, dénominateurs entre eux, en simplifiant avant de calculer.
3. Division : multiplier par l'inverse de la fraction diviseur.
4. Terminer par la simplification et le signe.

Exemple résolu

$$A = \frac{5}{6} - \frac{3}{4} \div \frac{9}{8}.$$

Priorité à la division : $3/4 \div 9/8 = 3/4 \times 8/9 = 24/36 = 2/3$.

Puis $A = 5/6 - 4/6 = 1/6$.

Passer d'un décimal périodique à une fraction

Pour $x = 0,2727\dots$: on multiplie par 100 pour décaler la période, $100x = 27,2727\dots$; on soustrait : $99x = 27$, donc $x = 27/99 = 3/11$. Un décimal périodique est donc toujours un rationnel.

3. Puissances entières relatives

Définition

Pour un réel a et un entier $n \geq 1$: $a^n = a \times a \times \dots \times a$ (n facteurs). On pose $a^0 = 1$ si $a \neq 0$, et pour $a \neq 0$: $a^{-n} = 1/a^n$.

Règles de calcul (a et b non nuls, m et n entiers relatifs)

- $a^m \times a^n = a^{m+n}$
- $[a^m/a^n] = a^{m-n}$
- $(a^m)^n = a^{m \times n}$
- $(a \times b)^n = a^n \times b^n$ et $(a/b)^n = [a^n/b^n]$
- $(a/b)^{-n} = (b/a)^n$

Exemples résolus

$$2^5 \times 2^{-8} = 2^{-3} = 1/8.$$

$$[[5^3/5^{-1}]] = 5^{3-(-1)} = 5^4 = 625.$$

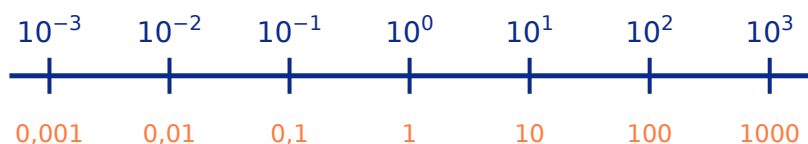
$$(2/3)^{-2} = (3/2)^2 = 9/4.$$

$$(3^2)^{-2} \times 3^5 = 3^{-4} \times 3^5 = 3.$$

Pièges classiques

$(-2)^4 = 16$ mais $-2^4 = -16$: les parenthèses comptent. a^{-n} n'est pas négatif : $2^{-3} = 1/8$ et non -8 . Et $a^m + a^n$ ne se simplifie pas : $2^3 + 2^2 = 12$, ce n'est pas 2^5 .

4. Puissances de 10 et notation scientifique



Multiplier par 10^n décale la virgule de n rangs vers la droite ($n > 0$) ; multiplier par 10^{-n} la décale de n rangs vers la gauche.

Notation scientifique

Un nombre décimal strictement positif s'écrit de façon unique $a \times 10^n$ avec $1 \leq a < 10$ et n entier relatif.

Exemples

$45\,600\,000 = 4,56 \times 10^7$ (virgule décalée de 7 rangs). $0,000\,072 = 7,2 \times 10^{-5}$.

Produit : $(3 \times 10^5) \times (4 \times 10^{-8}) = 12 \times 10^{-3} = 1,2 \times 10^{-2}$: on a dû ajuster, car 12 n'est pas compris entre 1 et 10.

Méthode : ordre de grandeur

Pour comparer ou estimer, on arrondit chaque facteur à une puissance de 10 voisine et on calcule : $4\,987 \times 0,0021 \approx 5 \times 10^3 \times 2 \times 10^{-3} = 10$.

5. Racine carrée

Définition

Pour un réel $a \geq 0$, $\sqrt{a}$ est l'unique nombre **positif** dont le carré vaut a . Donc $(\sqrt{a})^2 = a$ et $\sqrt{a^2} = a$ (si $a \geq 0$). Attention : $\sqrt{x^2} = |x|$ pour tout réel x ; par exemple $\sqrt{(-5)^2} = 5$.

Propriétés ($a \geq 0$ et $b \geq 0$)

- $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$
- si $b > 0$: $\sqrt{a/b} = \sqrt{a}/\sqrt{b}$
- si $a \leq b$ alors $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$ (la racine carrée conserve l'ordre)

Piège

En général $\sqrt{a + b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$. Par exemple $\sqrt{9 + 16} = 5$, alors que $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 7$.

Méthode : simplifier une racine

On cherche le plus grand carré parfait qui divise le nombre. $\sqrt{50} = \sqrt{(25 \times 2)} = 5\sqrt{2}$. $\sqrt{75} = \sqrt{(25 \times 3)} = 5\sqrt{3}$. Pour une somme : $3\sqrt{20} - \sqrt{45} + \sqrt{80} = 6\sqrt{5} - 3\sqrt{5} + 4\sqrt{5} = 7\sqrt{5}$: on obtient des racines du même type, que l'on regroupe comme des termes semblables.

Méthode : supprimer une racine au dénominateur

On multiplie en haut et en bas par la racine : $6/\sqrt{3} = 6\sqrt{3}/3 = 2\sqrt{3}$. Si le dénominateur est de la forme $a - \sqrt{b}$, on utilise l'expression conjuguée $a + \sqrt{b}$ et l'identité $(a - \sqrt{b})(a + \sqrt{b}) = a^2 - b$: $4/(3-\sqrt{5}) = 4(3+\sqrt{5})/4 = 3 + \sqrt{5}$.

Valeur exacte et valeur approchée

Un carré d'aire 72 cm^2 a pour côté $\sqrt{72} = 6\sqrt{2} \text{ cm}$ (valeur exacte), soit environ $8,49 \text{ cm}$ (valeur approchée à $0,01$ près). En calcul, garde la valeur exacte le plus longtemps possible.

6. Identités remarquables avec des racines

Rappel

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 ; (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 ; (a + b)(a - b) = a^2 - b^2.$$

Exemples résolus

$$(2\sqrt{3} + 1)^2 = (2\sqrt{3})^2 + 2 \times 2\sqrt{3} \times 1 + 1^2 = 12 + 4\sqrt{3} + 1 = 13 + 4\sqrt{3}.$$

$$(\sqrt{7} - 2)(\sqrt{7} + 2) = 7 - 4 = 3.$$

Avec $x = 1 + \sqrt{5}/2$: $x^2 = 6 + 2\sqrt{5}/4 = 3 + \sqrt{5}/2 = x + 1$. Le nombre x est le « nombre d'or ».

7. Multiples, diviseurs, divisibilité

Définitions

Pour a et b entiers ($b \neq 0$), « b divise a » signifie qu'il existe un entier k tel que $a = b \times k$. On dit aussi que a est un multiple de b et que b est un diviseur de a . La **division euclidienne** de a par b (entiers naturels, $b > 0$) donne $a = b \times q + r$ avec $0 \leq r < b$; b divise a exactement quand $r = 0$.

Exemple

$1\,234 = 37 \times 33 + 13$: le quotient est 33, le reste 13. Donc 37 ne divise pas 1 234. En revanche $1\,221 = 37 \times 33$, donc 37 divise 1 221.

Divisible par	Critère
2	le dernier chiffre est pair
3	la somme des chiffres est divisible par 3
5	le dernier chiffre est 0 ou 5
9	la somme des chiffres est divisible par 9
10	le dernier chiffre est 0

Règles utiles

Si b divise a et c , alors b divise $a + c$, $a - c$ et tout multiple de a . Un entier est pair s'il s'écrit $2k$, impair s'il s'écrit $2k + 1$ (k entier).

Méthode : démontrer une propriété sur les entiers

On **nomme** l'entier (n , ou $2k + 1$ pour un impair), on **développe**, on fait apparaître le facteur voulu, puis on conclut. Exemple : le carré d'un impair $(2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4k(k + 1) + 1$. Comme $k(k + 1)$ est pair, $4k(k + 1)$ est multiple de 8, donc le carré est de la forme $8m + 1$.

8. Nombres premiers et décomposition

Nombre premier

Un entier naturel est premier s'il possède exactement deux diviseurs : 1 et lui-même. 0 et 1 ne sont pas premiers. Les premiers : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31...

Décomposition en facteurs premiers

Tout entier $n \geq 2$ s'écrit comme un produit de nombres premiers, et cette écriture est unique (à l'ordre près). Pour savoir si n est premier, il suffit de tester les premiers p tels que $p^2 \leq n$.

Exemples

$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$. $1\,260 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7$. Donc **360/1260** : on retire les facteurs

communs $2^2 \times 3^2 \times 5 = 180$ et on obtient **2/7**.

Nombre de diviseurs : si $n = p^a \times q^b \times r^c$, il y en a $(a+1)(b+1)(c+1)$. Pour $84 = 2^2 \times 3 \times 7$: $3 \times 2 \times 2 = 12$ diviseurs.

Méthode : PGCD et PPCM par la décomposition

Le PGCD est le produit des facteurs communs avec le plus petit exposant ; le PPCM, celui de tous les facteurs avec le plus grand exposant. Pour $12 = 2^2 \times 3$ et $18 = 2 \times 3^2$: PGCD = $2 \times 3 = 6$; PPCM = $2^2 \times 3^2 = 36$.

Avec Mathbot

Mathbot te souffle : pour tester si un nombre inférieur à 200 est premier, essaie seulement 2, 3, 5, 7, 11 et 13. S'aucun ne divise, c'est gagné !

À retenir

- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$; $\sqrt{2}$, π sont irrationnels ; **1/3** est rationnel non décimal.
- $a^m \times a^n = a^{m+n}$; $[a^m/a^n] = a^{m-n}$; $(a^m)^n = a^{mn}$; $a^{-n} = \mathbf{1/a^n}$.
- Notation scientifique : $a \times 10^n$ avec $1 \leq a < 10$.
- $\sqrt{a}$ est positif, $(\sqrt{a})^2 = a$, $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$, mais $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.
- Pour simplifier : extraire le plus grand carré parfait ; pour un dénominateur irrationnel : multiplier par la racine ou par le conjugué.
- $a = bq + r$ avec $0 \leq r < b$; b divise a si $r = 0$.
- Un nombre premier a exactement deux diviseurs ; la décomposition en facteurs premiers est unique.
- Pour démontrer : nommer, développer, conclure (pair = $2k$, impair = $2k + 1$).