

Nombres relatifs

Cours de maths – 5ème

Il fait -6°C dehors, ton compte en banque affiche -12 € et le plongeur est à -20 m . Pour décrire ces situations, les nombres que tu connais ne suffisent plus : il te faut les **nombres relatifs**. Dans ce chapitre, tu apprends à les reconnaître, à les placer sur une droite, à les comparer, puis à les additionner et les soustraire.

1. Des nombres avec un signe

Nombre relatif Un nombre relatif est composé d'un **signe** (+ ou $-$) et d'une **distance à zéro**. Un nombre précédé de + est **positif**, un nombre précédé de $-$ est **négatif**. Le nombre 0 n'a pas de signe : il est à la fois positif et négatif.

Exemples (-7) est négatif : son signe est $-$ et sa distance à zéro est 7. $(+3,5)$ est positif : son signe est + et sa distance à zéro est 3,5. On écrit souvent 3,5 au lieu de $(+3,5)$: le signe + peut être omis.

Les nombres relatifs servent à décrire des situations où l'on peut aller « de l'autre côté » de zéro :

- une température : -4°C (sous zéro) ou $+15^{\circ}\text{C}$;
- une altitude : $+300\text{ m}$ (au-dessus du niveau de la mer) ou -40 m (en dessous) ;
- un solde : $+50\text{ €}$ (tu as de l'argent) ou -20 € (tu en dois) ;
- un étage d'immeuble : -2 pour le deuxième sous-sol.

Piège Un nombre négatif n'est pas « un nombre sans valeur » : -8 est très loin de zéro, plus loin que -2 ! La distance à zéro indique l'éloignement, le signe indique le côté.

2. La droite graduée

Abscisse Sur une droite graduée, on choisit un point O appelé **origine**, une **unité de longueur** et un **sens** (vers la droite en général). Les nombres positifs sont à droite de l'origine, les nombres négatifs à gauche. Le nombre associé à un point est son **abscisse**. On écrit $A(-2,5)$ pour dire que le point A a pour abscisse $-2,5$.

(Voir la droite graduée sur la page en ligne.)

Ici une unité est partagée en 10 : chaque petite graduation vaut 0,1. $A(-2,5)$; $B(-0,8)$; $C(1,3)$.

Lire ou placer une abscisse 1) Repère l'origine 0 et le sens positif. 2) Compte le nombre d'unités entières entre 0 et le point, du bon côté. 3) Compte ensuite les petites graduations. Pour $-0,8$, on part de 0 et on recule de 8 graduations de 0,1.

3. Opposé d'un nombre et distance à zéro

Nombres opposés Deux nombres sont **opposés** quand leur somme est égale à 0. Sur la droite graduée, leurs points sont **symétriques par rapport à l'origine**. L'opposé de $(+5)$ est (-5) ; l'opposé de $(-2,4)$ est $(+2,4)$; l'opposé de 0 est 0.

(Voir la droite graduée sur la page en ligne.)

$A(-3)$ et $B(3)$ sont opposés ; $C(-1,5)$ et $D(1,5)$ aussi.

Valeur absolue La **valeur absolue** d'un nombre est sa distance à zéro, c'est-à-dire le nombre sans son signe. On la note $|a|$. Par exemple $|-7| = 7$ et $|4,2| = 4,2$. Deux nombres opposés ont la même distance à zéro.

À savoir L'opposé de l'opposé d'un nombre est le nombre lui-même : $-(-9) = 9$.

4. Comparer des nombres relatifs

Règles de comparaison

- Un nombre négatif est **toujours plus petit** qu'un nombre positif : $-100 < 1$.
- Deux nombres positifs : le plus grand est celui qui a la plus grande distance à zéro : $7 > 4$.
- Deux nombres négatifs : **c'est le contraire** ! Le plus grand est celui qui a la plus petite distance à zéro : $-3 > -8$.

Ranger des nombres Place-les mentalement sur une droite graduée : plus un point est à droite, plus le nombre est grand. Pour l'ordre croissant, lis de la gauche vers la droite.

Exemple Rangeons dans l'ordre croissant : $2,5$; -6 ; $-1,2$; 0 ; $-6,4$. Les négatifs d'abord, en commençant par celui qui est le plus éloigné de zéro : $-6,4 < -6 < -1,2$, puis 0, puis 2,5. Réponse : $-6,4 < -6 < -1,2 < 0 < 2,5$.

Piège classique Il fait -10 °C lundi et -3 °C mardi : mardi est plus chaud, car $-3 > -10$. Ne te laisse pas tromper par « 10 est plus grand que 3 » !

5. Additionner des nombres relatifs

Deux nombres de même signe On additionne les distances à zéro et on garde le signe commun.

$$(-4) + (-7) = -11 \cdot (+2,5) + (+3,1) = 5,6$$

Deux nombres de signes contraires On soustrait la plus petite distance à zéro de la plus grande, et on garde le signe du nombre qui a la plus grande distance à zéro.

$$(+9) + (-5) = 4 \cdot (-8) + (+3) = -5 \cdot (+6) + (-6) = 0$$

Idée pour comprendre Pense à un solde : ajouter (-5) revient à dépenser 5 €. Si tu as 9 € et que tu dépenses 5 €, il te reste 4 €. Si tu as -8 € (une dette) et que tu reçois 3 €, tu dois encore 5 €.

(Voir la droite graduée sur la page en ligne.)

Sur la droite : on part de $A(-5)$ et on avance de 4 unités vers la droite : $(-5) + (+4) = -1$, point B.

Propriétés On peut additionner dans n'importe quel ordre et regrouper les termes comme on veut. Pour aller vite, on regroupe les nombres opposés (leur somme fait 0) ou les nombres de même signe.

$$\text{Exemple : } (+7) + (-3) + (-7) + (+8) = ((+7) + (-7)) + (-3) + (+8) = 0 + 5 = 5.$$

6. Soustraire des nombres relatifs

Soustraire, c'est ajouter l'opposé Pour tous nombres a et b : $a - b = a + (-b)$. On transforme la soustraction en addition de l'opposé, puis on applique les règles de l'addition.

Exemples

$$(+5) - (+8) = (+5) + (-8) = -3$$

$$(-2) - (-6) = (-2) + (+6) = 4$$

$$(-7) - (+4) = (-7) + (-4) = -11$$

Avec une distance Pour savoir de combien deux points sont éloignés sur une droite, on soustrait la plus petite abscisse de la plus grande. Entre -3 et 5 : $5 - (-3) = 5 + 3 = 8$ unités.

Piège Soustraire un nombre négatif **augmente** le résultat : $4 - (-6) = 4 + 6 = 10$, et non -2 . Écris toujours l'étape « + opposé ».

7. Enchaîner additions et soustractions

Méthode en trois étapes 1) Transforme chaque soustraction en addition de l'opposé : il ne reste que des additions. 2) Supprime les parenthèses et les signes + superflus : on obtient une **écriture simplifiée**. 3) Regroupe les termes positifs d'un côté, les termes négatifs de l'autre, puis calcule.

Exemple $S = (-3) + (+8) - (-5) - (+2)$

$S = (-3) + (+8) + (+5) + (-2)$

$S = -3 + 8 + 5 - 2$ (écriture simplifiée)

$S = (8 + 5) + (-3 - 2) = 13 + (-5) = \mathbf{8}$

Mathbot « Dans une écriture simplifiée, chaque nombre garde le signe qui est juste devant lui. Entoure-le avec son signe avant de regrouper : tu ne l'oublieras plus ! »

8. Résoudre un problème

La plupart des problèmes avec des relatifs se traitent en trois temps : **traduire** chaque donnée par un nombre relatif (gain positif, perte négative), **écrire** le calcul avec des parenthèses, **conclure** par une phrase avec l'unité.

Exemple À 6 h, il fait -4°C . La température monte de 7°C jusqu'à midi, puis baisse de 5°C le soir. Température finale : $(-4) + (+7) + (-5) = 3 + (-5) = -2$. **Le soir, il fait -2°C .**

À retenir

- Un nombre relatif a un signe (+ ou -) et une distance à zéro ; 0 n'a pas de signe.
- Deux nombres opposés ont une somme nulle et des points symétriques par rapport à l'origine.
- Entre deux négatifs, le plus grand est celui qui est le plus proche de zéro.
- Même signe : on additionne les distances et on garde le signe. Signes contraires : on soustrait les distances et on garde le signe de la plus grande.
- Soustraire un nombre, c'est ajouter son opposé : $a - b = a + (-b)$.
- Dans une suite d'additions et de soustractions, on simplifie l'écriture puis on regroupe positifs et négatifs.