

Notion de fonction

Cours de maths - 3ème

Le prix d'un trajet dépend de la distance, l'aire d'un carré dépend de son côté, la température dépend de l'heure... Les fonctions servent à décrire ces **dépendances** entre deux grandeurs. Dans ce chapitre, tu apprends le vocabulaire (variable, image, antécédent), puis tu calcules avec une formule, tu lis un tableau, tu lis et tu traces une courbe.

1. Rappels utiles avant de commencer

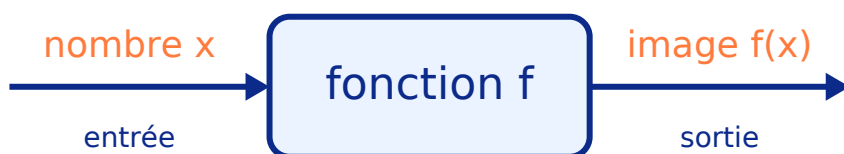
Ce qu'il faut savoir déjà Calculer une expression littérale : on remplace la lettre par le nombre, en mettant des parenthèses autour d'un nombre négatif. Avec $3x + 5$ pour $x = -2$: $3 \times (-2) + 5 = -6 + 5 = -1$.

Se repérer : un point a deux coordonnées (abscisse ; ordonnée). L'abscisse se lit sur l'axe horizontal, l'ordonnée sur l'axe vertical. Le point A(3 ; -2) est à 3 unités à droite de l'origine et 2 unités en dessous de l'axe horizontal.

Résoudre une équation simple : $4x - 7 = 9$ donne $4x = 16$ donc $x = 4$.

2. Qu'est-ce qu'une fonction ?

Un jardinier clôture un potager carré. Si le côté mesure x mètres, le grillage nécessaire mesure $4 \times x$ mètres. À chaque valeur de x , on associe **une seule** longueur de grillage. C'est un exemple de fonction.



Une fonction est comme une machine : on lui donne un nombre, elle renvoie un seul nombre.

Fonction Une **fonction** est un procédé qui, à chaque nombre x (la **variable**), associe **un unique nombre**. Si on appelle f cette fonction, le nombre associé à x se note $f(x)$ (on lit « f de x »). On écrit $f : x \mapsto f(x)$, ce qui se lit « f est la fonction qui, à x , associe $f(x)$ ».

Exemples Le périmètre du potager : $p : x \mapsto 4x$. Son aire : $a : x \mapsto x^2$, ce qui s'écrit aussi $a(x) = x^2$. Le prix de x baguettes à 1,10 € pièce : $b(x) = 1,1x$.

Le nom de la lettre n'a pas d'importance La variable peut s'appeler x , t (le temps), n ... et la fonction f , g , h , T ... Choisis des lettres qui te parlent : $T(t)$ pour une température en fonction du temps.

Attention à la notation $f(x)$ ne veut **pas** dire « f multiplié par x ». C'est « le nombre que la fonction f associe à x ».

3. Image et antécédent

Vocabulaire Si $f(a) = b$, on dit que :

- **b est l'image de a** par la fonction f ;
- **a est un antécédent de b** par la fonction f .

Exemple Avec $a(x) = x^2$: $a(5) = 25$. Donc 25 est l'image de 5, et 5 est un antécédent de 25. Mais on a aussi $a(-5) = 25$: le nombre 25 a **deux antécédents**, 5 et -5 .

À savoir Un nombre a **au plus une image** (c'est la définition d'une fonction : un unique nombre associé). En revanche, un nombre peut avoir **plusieurs antécédents**, un seul, ou aucun.

Piège classique Ne confonds pas « image » et « antécédent ». L'image, on la **calcule** à partir du nombre de départ. L'antécédent, on le **cherche** à partir du résultat. Dans $f(2) = -3$: l'image de 2 est -3 , l'antécédent de -3 est 2.

4. Fonction définie par une formule

Calculer une image On remplace x par la valeur donnée dans la formule, en mettant des parenthèses, puis on calcule en respectant les priorités.

Avec $g(x) = 2x^2 - 3x + 1$:

$$g(-2) = 2 \times (-2)^2 - 3 \times (-2) + 1 = 2 \times 4 + 6 + 1 = \mathbf{15}.$$

$$g(0) = 1 \text{ et } g(3) = 2 \times 9 - 9 + 1 = \mathbf{10}.$$

Parenthèses obligatoires $(-2)^2 = 4$ mais $-2^2 = -4$. Quand on remplace x par un nombre négatif, mets-le toujours entre parenthèses.

Chercher un antécédent par le calcul Chercher les antécédents de b par f , c'est **résoudre l'équation** $f(x) = b$.

Pour $h(x) = 3x - 4$, antécédent de 11 : $3x - 4 = 11$; $3x = 15$; $x = 5$. Vérification : $h(5) = 15 - 4 = 11$. L'antécédent de 11 est **5**.

Toujours vérifier Après avoir trouvé un antécédent, calcule son image : tu dois

retrouver le nombre de départ. C'est une preuve très rapide.

5. Fonction définie par un tableau de valeurs

Quand on ne dispose pas de formule, on peut présenter quelques valeurs dans un **tableau de valeurs** : la première ligne contient les nombres x , la seconde leurs images.

x	-2	-1	0	1	2	3
$k(x)$	7	4	3	4	7	12

Lire un tableau Image de 1 : je cherche 1 sur la première ligne et je lis en dessous : $k(1) = 4$.

Antécédents de 7 : je cherche 7 sur la **seconde** ligne et je lis au-dessus : -2 et 2. Le nombre 7 a donc deux antécédents.

Limite du tableau Un tableau ne donne que quelques valeurs. Si un nombre n'y figure pas, le tableau ne permet pas de conclure : il peut avoir un antécédent que l'on ne voit pas.

Construire un tableau avec une formule On choisit des valeurs de x , on calcule chaque image. Pour $f(x) = x^2 - 2x - 3$:

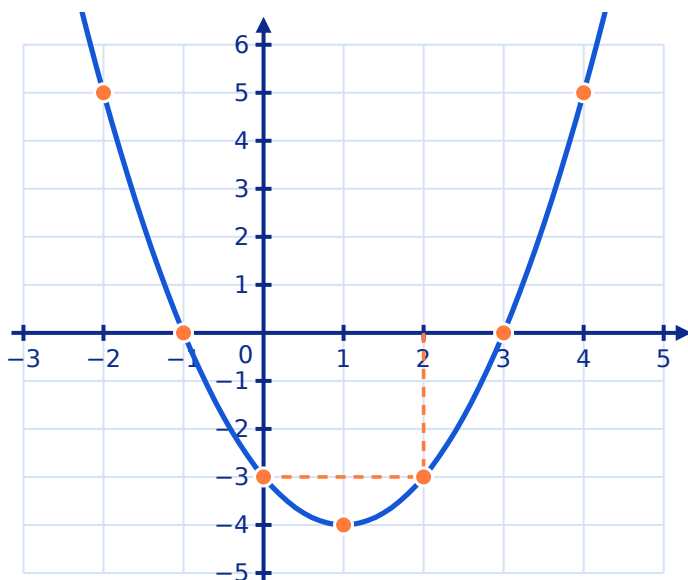
x	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	5	0	-3	-4	-3	0	5

Exemple d'une ligne : $f(-2) = (-2)^2 - 2 \times (-2) - 3 = 4 + 4 - 3 = 5$.

6. Représentation graphique : la courbe

Courbe représentative Dans un repère, la **courbe représentative** d'une fonction f est l'ensemble des points de coordonnées $(x ; f(x))$. L'abscisse est le nombre de départ, l'ordonnée est son image.

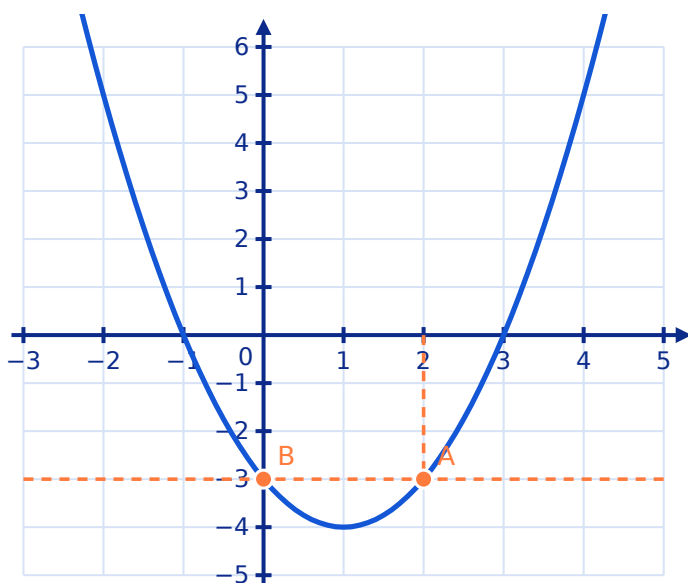
Voici la courbe de la fonction $f : x \mapsto x^2 - 2x - 3$ du tableau précédent. Chaque point orange vient d'une colonne du tableau.



Le point (3 ; 0) est sur la courbe parce que $f(3) = 0$.

Lire une image sur la courbe Pour trouver l'image de 2 : je pars de 2 sur l'axe horizontal, je monte (ou je descends) jusqu'à la courbe, puis je lis l'ordonnée du point trouvé. Ici $f(2) = -3$.

Lire des antécédents Pour les antécédents de -3 : je pars de -3 sur l'axe vertical, je trace l'horizontale, et je lis les abscisses de **tous** les points de la courbe rencontrés : 0 et 2.



Le pointillé horizontal à la hauteur -3 coupe la courbe en deux points A et B : le nombre -3 a deux antécédents, 0 et 2.

Vérifier avec la formule Si la formule est connue, contrôle ta lecture : $f(0) = -3$ et $f(2) = 4 - 4 - 3 = -3$. La lecture graphique donne souvent des valeurs approchées ; la formule donne les valeurs exactes.

7. Tracer une courbe point par point

Méthode 1) Je construis un tableau de valeurs avec des nombres x régulièrement espacés dans l'intervalle demandé.
2) Je choisis les unités des axes pour que tous les points tiennent sur la feuille, et je gradue les deux axes.
3) Je place chaque point $(x ; f(x))$ avec soin.
4) Je relie les points à main levée par une **courbe régulière**, sans angles (pas de segments droits entre les points sauf si on te le demande).

Erreurs fréquentes Mélanger l'abscisse et l'ordonnée ; oublier un signe moins ; changer d'échelle en cours de route ; relier les points avec une règle alors que la courbe est arrondie. Et si un point est « à part », recalcule son image : c'est sûrement une erreur de calcul.

Exemple de choix de graduation Pour x allant de -2 à 4 et des images entre -4 et 5 , on prend 1 cm pour 1 unité sur l'axe horizontal et 1 cm pour 1 unité sur l'axe vertical : la feuille permet de tout représenter.

8. Fonctions issues de situations concrètes

Beaucoup de situations de la vie courante se modélisent par une fonction. La première question est toujours : **quelle est la variable, et que calcule-t-on ?**

Un tarif Une salle d'escalade coûte 6 € d'abonnement mensuel, plus 3 € par séance. Pour x séances, le coût est $c(x) = 3x + 6$. Image de 5 : $c(5) = 21$, donc 5 séances coûtent 21 €. Antécédent de 30 : $3x + 6 = 30$ donne $x = 8$: avec 30 €, on fait 8 séances.

Une aire Un rectangle a un périmètre de 24 cm. Si sa largeur est x cm, sa longueur est $12 - x$ cm (demi-périmètre moins la largeur) et son aire est $A(x) = x(12 - x)$. Pour $x = 5$: $A(5) = 5 \times 7 = 35$ cm².

Une température Un thermomètre relevé toutes les trois heures donne un tableau (heure ; température). La fonction T associe à chaque heure t la température $T(t)$. Il n'y a pas de formule simple : on lit directement le tableau ou la courbe.

Quelle représentation choisir ?

- La **formule** donne tous les résultats exacts et permet les calculs.
- Le **tableau** donne rapidement quelques valeurs précises.
- La **courbe** donne une vue d'ensemble : où la fonction est grande, petite, où elle augmente ou diminue.

Mathbot « Une fonction, c'est un peu comme un distributeur : tu appuies sur une touche (le nombre x) et il te sert toujours la même chose (l'image $f(x)$). Par contre, plusieurs touches peuvent servir la même boisson : ce sont des antécédents ! »

À retenir

- Une fonction associe à chaque nombre x un **unique** nombre noté $f(x)$; on écrit $f : x \mapsto f(x)$.
- Si $f(a) = b$: b est l'**image** de a et a est un **antécédent** de b .
- Un nombre a au plus une image ; il peut avoir zéro, un ou plusieurs antécédents.
- Image avec une formule : je remplace x (parenthèses pour les négatifs) et je calcule.
- Antécédent avec une formule : je résous l'équation $f(x) = b$.
- Tableau : image = lecture de la ligne du bas ; antécédent = lecture de la ligne du haut.
- Courbe : image = ordonnée du point d'abscisse donnée ; antécédents = abscisses des points d'ordonnée donnée.
- Pour tracer une courbe : tableau de valeurs, repère gradué, points, tracé régulier.