

Opérations

Cours de maths - 5ème

Dans ce chapitre, tu apprends à **calculer dans le bon ordre**, à utiliser la **distributivité** pour calculer malin, à manipuler **multiples, diviseurs et critères de divisibilité**, à reconnaître les **nombre premiers** et à **diviser par un nombre décimal**. Ce sont les outils de base de toute l'année de 5ème : prends le temps de bien les maîtriser.

1. Le vocabulaire des opérations

Somme, différence, produit, quotient Le résultat d'une addition est une **somme**, ses nombres sont les **termes**. Le résultat d'une soustraction est une **différence**. Le résultat d'une multiplication est un **produit**, ses nombres sont les **facteurs**. Le résultat d'une division est un **quotient**.

Exemple Dans $6 + 15 = 21$, la somme est 21 et les termes sont 6 et 15. Dans $4 \times 7 = 28$, le produit est 28 et les facteurs sont 4 et 7.

Reconnaître une somme ou un produit Une expression est une **somme** si la **dernière opération** à effectuer est une addition. Elle est un **produit** si la dernière opération à effectuer est une multiplication.

Exemple $3 \times 5 + 2$ est une somme (on calcule 3×5 , puis on ajoute 2). En revanche $3 \times (5 + 2)$ est un produit : la dernière opération est la multiplication par 3.

2. Les priorités opératoires

Ordre des calculs Dans une expression sans autre indication, on effectue :

- 1) d'abord les calculs **entre parenthèses** (en commençant par les plus intérieures) ;
- 2) puis les **multiplications et les divisions**, de gauche à droite ;
- 3) enfin les **additions et les soustractions**, de gauche à droite.

Exemple résolu

$$A = 20 - 3 \times (4 + 2) + 18 \div 6$$

$$A = 20 - 3 \times 6 + 18 \div 6 \quad (\text{parenthèses})$$

$$A = 20 - 18 + 3 \quad (\text{multiplication et division})$$

$A = 2 + 3 = 5$ (soustraction puis addition, de gauche à droite)

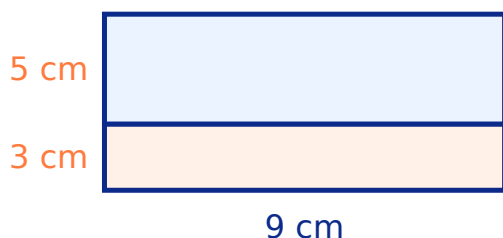
Piège Avec $40 \div 8 \times 5$, on calcule de gauche à droite : $40 \div 8 = 5$ puis $5 \times 5 = 25$, et non $40 \div 40 = 1$. De même $30 - 12 + 5 = 18 + 5 = 23$ (et pas $30 - 17 = 13$).

Écrire un calcul en une seule expression Pour un problème en plusieurs étapes, on traduit chaque étape, puis on les assemble en respectant les priorités. Exemple : j'achète 3 livres à 8,50 € et un jeu à 12 €, je paye avec 50 €. Je dois rendre $50 - (3 \times 8,5 + 12) = 50 - (25,5 + 12) = 50 - 37,5 = 12,5$ €.

Mathbot te conseille Recopie l'expression à chaque étape en ne changeant que la partie que tu viens de calculer : tu évites les oublis et tu retrouves ton erreur plus facilement.

3. La distributivité numérique

Un rectangle de 9 cm de large est coupé en deux bandes de 5 cm et de 3 cm de hauteur. Son aire se calcule de deux façons.



Aire totale : $9 \times (5 + 3) = 9 \times 8 = 72 \text{ cm}^2$. Aire des deux morceaux : $9 \times 5 + 9 \times 3 = 45 + 27 = 72 \text{ cm}^2$. Les deux résultats sont égaux.

Distributivité de la multiplication sur l'addition et la soustraction Quels que soient les nombres k , a et b :

$$k \times (a + b) = k \times a + k \times b$$

$$k \times (a - b) = k \times a - k \times b \text{ (avec } a \geq b \text{)}$$

Développer, factoriser Passer de $k \times (a + b)$ à $k \times a + k \times b$, c'est **développer** : un produit devient une somme. Faire l'inverse, c'est **factoriser** : une somme devient un produit. Le nombre k est le **facteur commun**.

Calculer malin en développant On écrit un des nombres comme une somme ou une différence de nombres faciles.

$$13 \times 102 = 13 \times (100 + 2) = 1\,300 + 26 = 1\,326$$

$$19 \times 49 = 19 \times (50 - 1) = 950 - 19 = \mathbf{931}$$

$$12 \times 7,5 = 12 \times (7 + 0,5) = 84 + 6 = \mathbf{90}$$

Calculer malin en factorisant On repère le facteur commun, puis on regroupe.

$$4,6 \times 8 + 4,6 \times 2 = 4,6 \times (8 + 2) = 4,6 \times 10 = \mathbf{46}$$

$$35 \times 17 - 35 \times 7 = 35 \times (17 - 7) = 35 \times 10 = \mathbf{350}$$

Attention Dans $6 \times 7 + 4$, il n'y a pas de parenthèses : on ne peut pas « distribuer » le 6 sur le 4. Et $6 \times (7 + 4) = 66$ est différent de $6 \times 7 + 4 = 46$.

4. Calcul réfléchi et ordres de grandeur

Multiplier ou diviser par 10, 100, 1 000 On décale la virgule de 1, 2 ou 3 rangs vers la droite pour multiplier, vers la gauche pour diviser (en ajoutant des zéros si besoin).
Exemples : $3,72 \times 100 = 372$; $0,045 \times 10 = 0,45$; $56 \div 1\,000 = 0,056$.

Doubles, moitiés, décompositions Multiplier par 5, c'est multiplier par 10 puis prendre la moitié : $36 \times 5 = 360 \div 2 = 180$. Multiplier par 25, c'est multiplier par 100 puis diviser par 4 : $48 \times 25 = 4\,800 \div 4 = 1\,200$.

Ordre de grandeur C'est un résultat approché, obtenu en remplaçant les nombres par des nombres proches et simples. Il sert à **vérifier la vraisemblance** d'un résultat.

Exemple Pour $4,9 \times 20,2$: 4,9 est proche de 5 et 20,2 de 20, donc le produit est proche de $5 \times 20 = 100$. Un résultat de 9,898 ou de 989,8 est forcément faux ; le bon résultat est 98,98.

5. Multiples, diviseurs et division euclidienne

Division euclidienne Effectuer la division euclidienne d'un entier **a** (le dividende) par un entier **b** non nul (le diviseur), c'est trouver deux entiers **q** (le quotient) et **r** (le reste) tels que : **$a = b \times q + r$** avec **$r < b$** .

Exemple Division euclidienne de 200 par 7 : $7 \times 28 = 196$ et $200 - 196 = 4$. Donc $200 = 7 \times 28 + 4$, le quotient est 28 et le reste est 4 (bien inférieur à 7).

Multiple, diviseur, divisible Si le reste de la division euclidienne de a par b est 0, c'est-à-dire si $a = b \times q$ avec q entier, on dit que :

- a est un **multiple** de b et de q ;
- b et q sont des **diviseurs** de a ;
- a est **divisible** par b et par q.

Exemple $45 = 5 \times 9$. Donc 45 est un multiple de 5 et de 9 ; 5 et 9 sont des diviseurs

de 45 ; 45 est divisible par 5 et par 9.

Trouver tous les diviseurs d'un nombre On essaie les entiers 1, 2, 3, 4... et on note chaque fois la paire de diviseurs trouvée. On s'arrête dès que le diviseur essayé est plus grand que le quotient obtenu : on a alors déjà tout trouvé. Pour $36 : 1 \times 36 ; 2 \times 18 ; 3 \times 12 ; 4 \times 9 ; 6 \times 6$ (on s'arrête ici). Les diviseurs de 36 sont 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 et 36.



Chaque flèche relie deux diviseurs dont le produit est 36. Le diviseur 6 est seul au milieu car $6 \times 6 = 36$.

Multiples et diviseurs communs Un **multiple commun** à deux nombres est un nombre qui est multiple de chacun. Pour 4 et 6 : les multiples de 4 sont 4, 8, 12, 16, 20, 24... ; ceux de 6 sont 6, 12, 18, 24... Les multiples communs sont 12, 24, 36... et le plus petit (non nul) est 12. De la même façon, 1, 2, 3 et 6 sont les **diviseurs communs** de 12 et de 18.

Quotient ou reste ? Dans un problème de partage, on se demande ce que représente la réponse. « Combien de cars de 50 places pour 230 personnes ? » : $230 = 50 \times 4 + 30$, il y a un reste, donc il faut **5 cars**, pas 4.

6. Les critères de divisibilité

Critères à connaître Un nombre entier est divisible :

- par **2** si son chiffre des unités est 0, 2, 4, 6 ou 8 ;
- par **5** si son chiffre des unités est 0 ou 5 ;
- par **10** si son chiffre des unités est 0 ;
- par **3** si la **somme de ses chiffres** est un multiple de 3 ;
- par **9** si la somme de ses chiffres est un multiple de 9.

Exemples $4\,572 : 4 + 5 + 7 + 2 = 18$, qui est multiple de 3 et de 9 ; le nombre est pair. Il est donc divisible par 2, par 3 et par 9, mais pas par 5 ni par 10.

$1\,385 : 1 + 3 + 8 + 5 = 17$, pas multiple de 3 ; il se termine par 5 donc il est divisible par 5, mais pas par 2, 3, 9 ou 10.

Astuce Un nombre divisible par 9 est toujours divisible par 3 (mais l'inverse est faux : 12 est divisible par 3, pas par 9). Un nombre divisible à la fois par 2 et par 3 est

divisible par 6.

7. Les nombres premiers

Nombre premier Un nombre entier est **premier** s'il possède **exactement deux diviseurs** : 1 et lui-même.

Cas particuliers 1 n'est pas premier : il n'a qu'un seul diviseur. 2 est le seul nombre premier pair, car tout autre nombre pair est aussi divisible par 2. Un nombre comme $15 = 3 \times 5$ n'est pas premier : on dit qu'il est **composé**.

Voici le tableau des nombres de 1 à 50 ; les nombres premiers sont en gras. Pour le construire (c'est le « crible d'Ératosthène »), on barre 1, puis tous les multiples de 2 sauf 2, de 3 sauf 3, de 5 sauf 5, de 7 sauf 7 : ce qui reste est premier.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50

Les nombres premiers inférieurs à 50 : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47.

Savoir si un nombre est premier On teste s'il est divisible par 2, 3, 5, 7, 11... à l'aide des critères ou d'une calculatrice, en s'arrêtant quand le diviseur essayé dépasse le quotient. Dès qu'on trouve un diviseur autre que 1 et le nombre, il n'est pas premier. Exemple : 91 n'est divisible ni par 2, ni par 3 ($9 + 1 = 10$), ni par 5, mais $91 = 7 \times 13$: il n'est **pas premier**. Pour 83 : pas divisible par 2, 3, 5, 7 ($7 \times 11 = 77$ et $7 \times 12 = 84$) ; avec 11, le quotient (7) est plus petit que le diviseur : 83 est **premier**.

8. Algorithme de recherche des diviseurs

Pour ne rien oublier, on peut écrire la méthode de la partie 5 sous forme d'algorithme. La voici pour un nombre N :

Algorithme

1. Choisir un entier N.
2. Pour chaque entier d en partant de 1, tant que $d \times d \leq N$:
si le reste de la division euclidienne de N par d est 0, alors afficher d et le quotient $N \div d$.
3. Fin.

Exemple avec $N = 20$ $d = 1$: reste 0, on affiche 1 et 20. $d = 2$: reste 0, on affiche 2 et 10. $d = 3$: reste 2, rien. $d = 4$: reste 0, on affiche 4 et 5. $d = 5$: $5 \times 5 = 25$ est plus grand que 20, on s'arrête. Les diviseurs de 20 sont 1, 2, 4, 5, 10 et 20. Si l'algorithme affiche seulement 1 et N, le nombre est premier.

Avec une calculatrice ou un tableur, on peut obtenir le quotient et le reste d'une division euclidienne, ce qui accélère les essais.

9. Diviser par un nombre décimal

On ne change pas un quotient en multipliant ses deux nombres par un même nombre non nul Par exemple $6 \div 3 = 60 \div 30 = 600 \div 300 = 2$. Pour que le diviseur devienne entier, on multiplie donc le dividende et le diviseur par 10, par 100 ou par 1 000.

Diviser par un décimal non entier 1) On multiplie le diviseur par 10, 100... pour obtenir un entier. 2) On multiplie le dividende par le même nombre. 3) On effectue la division obtenue.

Exemples résolus

$7,2 \div 0,4 = 72 \div 4 = \mathbf{18}$ (on multiplie par 10).

$0,63 \div 0,09 = 63 \div 9 = \mathbf{7}$ (on multiplie par 100).

$9 \div 0,25 = 900 \div 25 = \mathbf{36}$ (on multiplie par 100).

À ne pas oublier Il faut multiplier les **deux** nombres par la même puissance de 10. Et diviser par 0,5 n'est pas diviser par 5 : $3 \div 0,5 = 30 \div 5 = 6$, qui est le double de 3 (il y a six moitiés dans 3).

Un problème Avec 4,8 L de sirop, on remplit des verres de 0,16 L. Nombre de verres : $4,8 \div 0,16 = 480 \div 16 = 30$. On remplit **30 verres**.

À retenir

- Somme = résultat d'une addition ; produit = résultat d'une multiplication ; une expression est une somme ou un produit selon sa dernière opération.
- Priorités : parenthèses, puis $\times$ et $\div$ de gauche à droite, puis $+$ et $-$ de gauche à droite.
- Distributivité : $k \times (a + b) = k \times a + k \times b$ et $k \times (a - b) = k \times a - k \times b$; on s'en sert pour développer, factoriser et calculer malin.
- $a = b \times q + r$ avec $r < b$: division euclidienne ; si $r = 0$, a est un multiple de b et b est un diviseur de a .
- Critères : par 2 (unités paires), 5 (0 ou 5), 10 (0), 3 et 9 (somme des chiffres multiple de 3 ou de 9).

- Un nombre premier a exactement deux diviseurs : 1 et lui-même. 1 n'est pas premier, 2 est le seul premier pair.
- Pour diviser par un décimal, on multiplie dividende et diviseur par 10, 100... pour que le diviseur devienne entier.