

Parallélogrammes

Cours de maths - 5ème

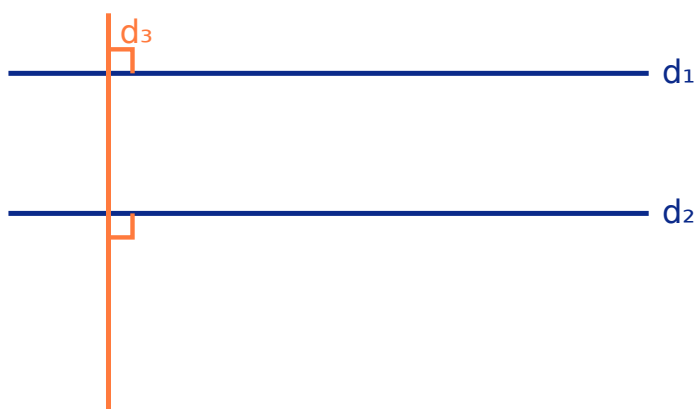
Dans ce chapitre, tu fais connaissance avec une famille de quadrilatères très utile : les **parallélogrammes**. Tu apprends à les reconnaître, à les construire, à utiliser leurs propriétés pour calculer des longueurs et des angles, puis tu découvres leurs cousins célèbres, le **rectangle**, le **losange** et le **carré**. Pour finir, tu calcules leur **périmètre** et leur **aire**.

1. Rappels : droites parallèles et perpendiculaires

Parallèles et perpendiculaires Deux droites sont **parallèles** lorsqu'elles ne se croisent jamais : elles gardent toujours le même écartement. On écrit $(d_1) \parallel (d_2)$. Deux droites sont **perpendiculaires** lorsqu'elles se coupent en formant un angle droit (90°). On écrit $(d_1) \perp (d_2)$.

Trois propriétés à connaître

- Si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième droite, alors elles sont parallèles entre elles.
- Si deux droites sont parallèles et si une troisième droite est perpendiculaire à l'une, alors elle est aussi perpendiculaire à l'autre.
- Si deux droites sont parallèles à une même troisième droite, alors elles sont parallèles entre elles.



Les droites d_1 et d_2 sont toutes les deux perpendiculaires à d_3 : elles sont donc parallèles.

Tracer la parallèle à une droite (d) passant par un point M

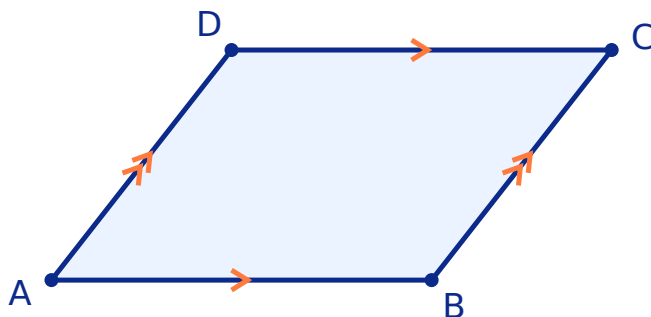
1. Place l'équerre contre la droite (d), puis cale la règle contre un autre côté de l'équerre.

2. Fais glisser l'équerre le long de la règle jusqu'à ce que son bord passe par M.
3. Trace le long de ce bord : c'est la parallèle cherchée.

Attention au dessin Deux droites peuvent sembler parallèles sur un dessin sans l'être. En géométrie, on ne se fie jamais au dessin : on utilise le **codage** (flèches pour les parallèles, petits traits pour les longueurs égales, carré pour l'angle droit) et les propriétés du cours.

2. Qu'est-ce qu'un parallélogramme ?

Parallélogramme Un **parallélogramme** est un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles deux à deux.



Sur ABCD, $(AB) \parallel (DC)$ et $(AD) \parallel (BC)$. Les flèches simples et doubles le codent.

Vocabulaire à bien employer

- Les côtés $[AB]$ et $[DC]$ sont **opposés** ; les côtés $[AB]$ et $[BC]$ sont **consécutifs** (ils se touchent).
- Les sommets A et C sont **opposés** ; les angles $\angle DAB$ et $\angle BCD$ sont **opposés**.
- Les segments $[AC]$ et $[BD]$ sont les **diagonales** : elles relient deux sommets opposés.

Astuce de lecture Pour nommer un parallélogramme, on cite les sommets **dans l'ordre** en faisant le tour de la figure. ABCD est un parallélogramme, mais ACBD n'en est pas un : ses « côtés » seraient les diagonales.

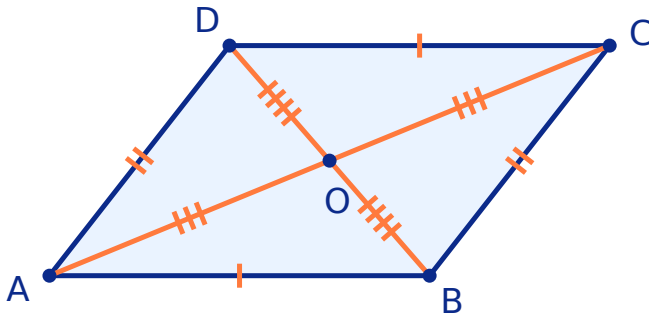
3. Les propriétés du parallélogramme

Propriétés Si ABCD est un parallélogramme, alors :

- ses côtés opposés ont la même longueur : $AB = DC$ et $AD = BC$;
- ses angles opposés ont la même mesure : $\angle A = \angle C$ et $\angle B = \angle D$;
- deux angles consécutifs sont supplémentaires, c'est-à-dire que leur somme vaut

$$180^\circ : \angle A + \angle B = 180^\circ ;$$

- ses diagonales se coupent en leur milieu : si O est leur point d'intersection, O est le milieu de [AC] et de [BD] ;
- le point O est son **centre de symétrie** : en le faisant tourner d'un demi-tour autour de O, il se superpose à lui-même.



Les petits traits identiques codent les longueurs égales : $AB = DC$, $AD = BC$, $OA = OC$ et $OB = OD$.

Exemple résolu ABCD est un parallélogramme. On sait que $AB = 6$ cm, $AD = 3,5$ cm et $\angle DAB = 70^\circ$.

- Les côtés opposés ont la même longueur : $DC = AB = 6$ cm et $BC = AD = 3,5$ cm.
- $\angle BCD$ est opposé à $\angle DAB$: $\angle BCD = 70^\circ$.
- $\angle ABC$ est consécutif à $\angle DAB$: $\angle ABC = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$. Et $\angle CDA = \angle ABC = 110^\circ$ (angles opposés).
- Vérification : $70^\circ + 110^\circ + 70^\circ + 110^\circ = 360^\circ$, la somme des angles d'un quadrilatère.

Pourquoi 180° ? Les côtés (AD) et (BC) sont parallèles et (AB) les coupe : les angles $\angle DAB$ et $\angle ABC$ sont « du même côté » de la sécante, ils se complètent pour faire un angle plat.

4. Reconnaître un parallélogramme

Les propriétés précédentes marchent aussi dans l'autre sens : si un quadrilatère les possède, c'est forcément un parallélogramme. Il suffit d'**une seule** de ces conditions.

Cinq façons de prouver qu'un quadrilatère ABCD est un parallélogramme

1. Ses côtés opposés sont parallèles deux à deux.
2. Ses côtés opposés ont la même longueur deux à deux.
3. Il a deux côtés opposés parallèles **et** de même longueur.
4. Ses diagonales se coupent en leur milieu.
5. Il possède un centre de symétrie.

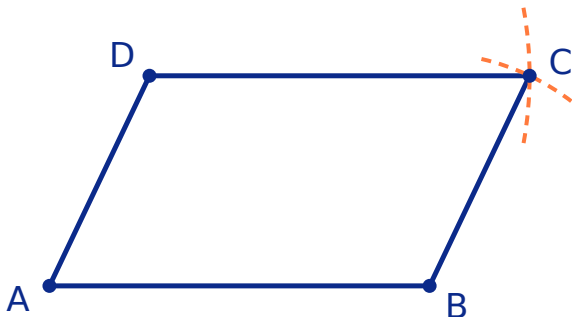
Exemple EFGH est un quadrilatère tel que $EF = 4 \text{ cm}$, $GH = 4 \text{ cm}$, $FG = 2,5 \text{ cm}$ et $HE = 2,5 \text{ cm}$. Ses côtés opposés ont la même longueur deux à deux, donc EFGH est un parallélogramme.

Un piège classique « Deux côtés opposés de même longueur » ne suffit pas ! Il faut que les **deux paires** de côtés opposés soient égales, ou bien que les deux côtés égaux soient aussi parallèles. Un trapèze isocèle a deux côtés opposés égaux (les côtés non parallèles), mais ce n'est pas un parallélogramme.

5. Construire un parallélogramme

Méthode 1 : au compas (on connaît A, B et D)

1. Trace $[AB]$ et $[AD]$.
2. Avec le compas, prends l'écartement AD. Pointe en B et trace un arc vers l'endroit où sera C.
3. Prends l'écartement AB. Pointe en D et trace un second arc qui coupe le premier : c'est le point C.
4. Relie B à C et D à C. Les côtés opposés ont la même longueur deux à deux : ABCD est un parallélogramme.



Les deux arcs en pointillés se coupent en C : $BC = AD$ et $DC = AB$.

Méthode 2 : avec l'équerre et la règle Après avoir tracé $[AB]$ et $[AD]$, trace la parallèle à (AB) passant par D, puis la parallèle à (AD) passant par B. Elles se coupent en C.

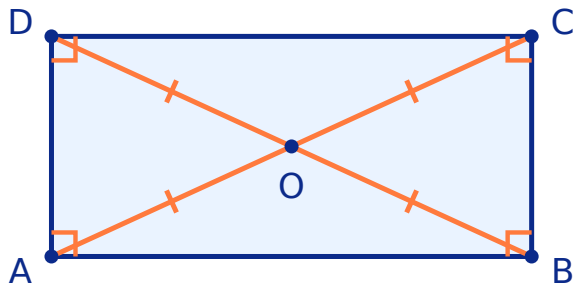
Méthode 3 : avec les diagonales Trace deux segments $[AC]$ et $[BD]$ qui se coupent en leur milieu O. Le quadrilatère ABCD obtenu est un parallélogramme (il suffit de bien reporter les longueurs $OA = OC$ et $OB = OD$).

Mathbot, le robot-coach, te conseille Avant de construire, fais une figure à main levée et code-la : tu sauras quelle méthode choisir selon les mesures données.

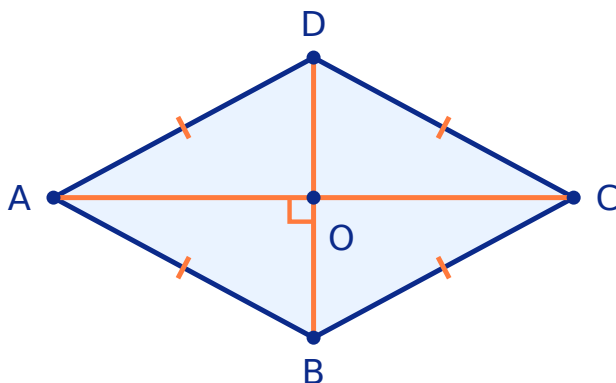
6. Rectangle, losange et carré

Ce sont des parallélogrammes qui ont quelque chose de plus. Ils héritent donc de **toutes** les propriétés d'un parallélogramme.

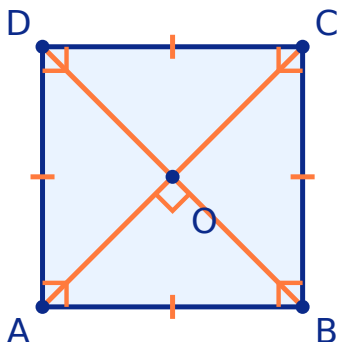
Rectangle Un **rectangle** est un quadrilatère qui a quatre angles droits. C'est un parallélogramme dont les diagonales ont la même longueur.



Losange Un **losange** est un quadrilatère qui a quatre côtés de même longueur. C'est un parallélogramme dont les diagonales sont perpendiculaires.



Carré Un **carré** est un quadrilatère qui a quatre angles droits et quatre côtés de même longueur. C'est à la fois un rectangle et un losange.



Reconnaitre un parallélogramme particulier Soit ABCD un parallélogramme.

- S'il a un angle droit, alors c'est un rectangle.
- Si ses diagonales ont la même longueur, alors c'est un rectangle.
- S'il a deux côtés consécutifs de même longueur, alors c'est un losange.
- Si ses diagonales sont perpendiculaires, alors c'est un losange.
- S'il est à la fois un rectangle et un losange, alors c'est un carré.

Propriété	Parallélogramme	Rectangle	Losange	Carré
Côtés opposés parallèles	oui	oui	oui	oui
Côtés opposés égaux	oui	oui	oui	oui
Diagonales de même milieu	oui	oui	oui	oui
Quatre côtés égaux	non	non	oui	oui
Quatre angles droits	non	oui	non	oui
Diagonales égales	non	oui	non	oui
Diagonales perpendiculaires	non	non	oui	oui

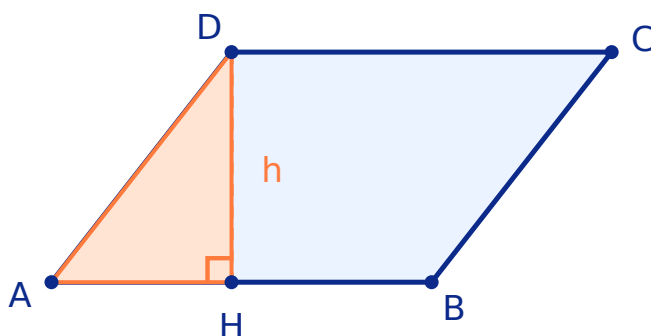
« Non » signifie « pas en général » : un cas particulier peut avoir la propriété (un rectangle peut être un carré).

Ne confonds pas Dans un rectangle, les diagonales sont égales mais *pas* perpendiculaires (sauf si c'est un carré). Dans un losange, les diagonales sont perpendiculaires mais *pas* égales (sauf si c'est un carré).

7. Périmètre et aire

Périmètre Le périmètre d'un parallélogramme dont les côtés mesurent a et b est $P = 2 \times (a + b)$. Pour un losange ou un carré de côté c , $P = 4 \times c$.

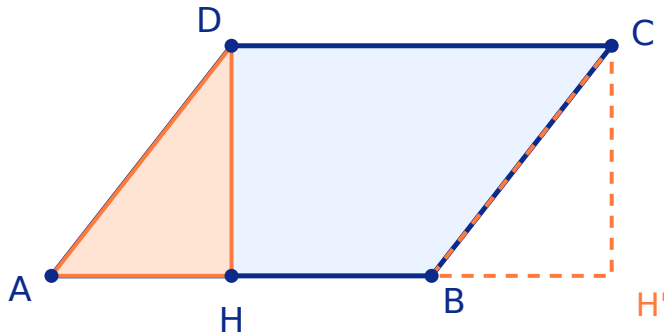
Hauteur La **hauteur** relative à un côté (la base) est le segment perpendiculaire à ce côté, tracé depuis le côté opposé (ou depuis un sommet). Elle est **plus courte** que l'autre côté du parallélogramme.



Aire d'un parallélogramme L'aire d'un parallélogramme est le produit d'un côté (la base) par la hauteur relative à ce côté :

$$\square = \text{base} \times \text{hauteur}.$$

Les deux longueurs doivent être exprimées dans la même unité ; l'aire est en unité².



On découpe le triangle ADH et on le déplace en BH'C : le parallélogramme devient un rectangle de même aire, de dimensions AB et h.

Exemple Un parallélogramme a une base de 9 cm, une hauteur relative à cette base de 4 cm et l'autre côté de 5 cm.

Aire : $9 \times 4 = 36 \text{ cm}^2$. Périmètre : $2 \times (9 + 5) = 28 \text{ cm}$.

Le piège du côté oblique L'aire ne se calcule **pas** en multipliant deux côtés consécutifs (ici $9 \times 5 = 45$, c'est faux). Il faut la hauteur, qui est perpendiculaire à la base. De même, le périmètre n'utilise jamais la hauteur.

Cas particuliers Rectangle de longueur L et de largeur l : $\square = L \times l$. Carré de côté c : $\square = c \times c$. Losange de diagonales d et D : $\square = (d \times D) \div 2$, car il se partage en quatre triangles rectangles égaux, ou en deux triangles de base D et de hauteur $d \div 2$.

8. Rédiger une preuve en géométrie

La démarche en trois temps

1. **Ce que je sais** : je cite les données de l'énoncé, ou le codage de la figure.
2. **Ce que j'utilise** : je nomme la propriété du cours.
3. **Ce que j'en déduis** : je conclus avec une phrase complète.

Exemple de rédaction « Dans le quadrilatère RSTU, les diagonales [RT] et [SU] se coupent en leur milieu. Or si un quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leur milieu, alors c'est un parallélogramme. Donc RSTU est un parallélogramme. »

Si on sait en plus que $RT = SU$, on ajoute : « Un parallélogramme dont les diagonales ont la même longueur est un rectangle. Donc RSTU est un rectangle. »

À ne pas faire Ne justifie jamais « parce que ça se voit sur la figure » ni en mesurant : une mesure est approchée, une preuve est exacte.

À retenir

- Un **parallélogramme** est un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles deux à deux.
- Il a ses côtés opposés égaux, ses angles opposés égaux, ses angles consécutifs supplémentaires (180°), ses diagonales qui se coupent en leur milieu : ce milieu est son centre de symétrie.
- Pour le reconnaître : côtés opposés parallèles ou égaux deux à deux, ou deux côtés opposés parallèles et égaux, ou diagonales de même milieu, ou centre de symétrie.
- Rectangle : parallélogramme avec un angle droit, ou à diagonales égales. Losange : parallélogramme avec deux côtés consécutifs égaux, ou à diagonales perpendiculaires. Carré : rectangle et losange à la fois.
- Périmètre : $P = 2 \times (a + b)$. Aire : $\square = \text{base} \times \text{hauteur}$ (hauteur perpendiculaire à la base).
- En géométrie, on prouve avec les propriétés, jamais avec le dessin ni la règle.