

Parallélogrammes et translations

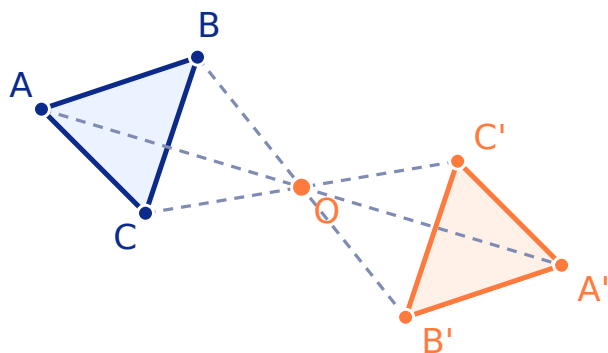
Cours de maths - 4ème

Dans ce chapitre, tu étudies une figure que tu rencontres partout (carrelages, portails, toits, vitres inclinées) : le **parallélogramme**, avec ses cas particuliers, le rectangle, le losange et le carré. Tu apprends à le **construire**, à **démontrer** qu'un quadrilatère en est un et à utiliser ses propriétés. Ensuite tu découvres la **translation**, une transformation qui fait « glisser » une figure sans la tourner.

1. Rappels : symétrie centrale et vocabulaire

Symétrique d'un point par rapport à un point Deux points A et A' sont **symétriques par rapport à un point O** lorsque O est le **milieu** du segment [AA']. On dit que A' est l'image de A par la symétrie de centre O. Le symétrique de O est O lui-même.

Construire le symétrique d'un point A par rapport à O 1) Trace la droite (AO). 2) Avec le compas, prends l'écartement OA. 3) Pointe en O et reporte-le de l'autre côté de A : tu obtiens A'. 4) Code les deux longueurs égales $OA = OA'$. Pour une figure, on construit les symétriques de ses sommets puis on les relie.



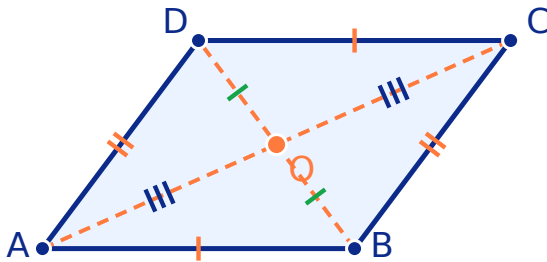
Le triangle A'B'C' est le symétrique du triangle ABC par rapport à O : la figure a fait un demi-tour autour de O.

Propriétés de la symétrie centrale La symétrie centrale **conserve** l'alignement, les longueurs, les angles, les aires et le parallélisme. En particulier, une droite et sa symétrique sont **parallèles**, et un segment a pour image un segment de même longueur.

Une figure possède un **centre de symétrie** si elle est son propre symétrique par rapport à ce point. Le rond-point d'un plan de ville n'en a pas, mais la lettre S ou le signe « + » en ont.

2. Le parallélogramme et ses propriétés

Parallélogramme Un **parallélogramme** est un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles deux à deux. Dans ABCD, on a $(AB) \parallel (DC)$ et $(AD) \parallel (BC)$. Les sommets sont nommés dans l'ordre en faisant le tour de la figure.



Propriétés d'un parallélogramme ABCD

1. Ses côtés opposés ont la même longueur : $AB = DC$ et $AD = BC$.
2. Ses angles opposés sont égaux : angle A = angle C et angle B = angle D.
3. Deux angles consécutifs sont supplémentaires : angle A + angle B = 180° .
4. Ses diagonales [AC] et [BD] se coupent en leur milieu O. Le point O est un **centre de symétrie** du parallélogramme.

Exemple RSTU est un parallélogramme avec $RS = 8$ cm, $ST = 5$ cm et angle R = 70° . Alors $UT = 8$ cm (côtés opposés), $RU = 5$ cm, angle T = 70° (angles opposés) et angle S = $180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$ (angles consécutifs). Le périmètre est $2 \times (8 + 5) = 26$ cm.

Pourquoi le centre O ? Comme O est le milieu de [AC] et de [BD], la symétrie de centre O envoie A sur C et B sur D. Elle envoie donc le côté [AB] sur le côté [CD] : voilà pourquoi ces côtés sont parallèles et de même longueur. Les quatre propriétés viennent de ce demi-tour.

3. Démontrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme

Caractérisations (réciproques) Un quadrilatère **non croisé** est un parallélogramme dans chacun de ces cas :

- ses côtés opposés sont parallèles deux à deux ;
- ses diagonales ont le **même milieu** ;
- ses côtés opposés ont la **même longueur** deux à deux ;
- deux côtés opposés sont **parallèles et de même longueur** ;
- ses angles opposés sont égaux deux à deux.

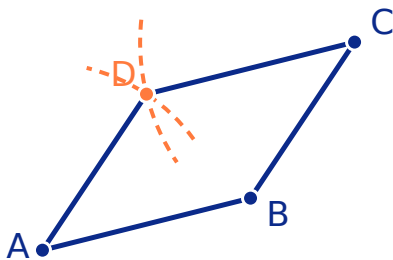
Attention aux conditions Deux côtés opposés **égaux** ne suffisent pas : un trapèze isocèle a deux côtés non parallèles égaux. Deux côtés opposés **parallèles** ne suffisent pas non plus : un trapèze en a deux. Il faut les deux ensemble, ou bien une autre caractérisation complète.

Rédiger une démonstration 1) Je donne les **données** de l'énoncé. 2) Je cite la **propriété** utilisée. 3) Je conclus par une phrase qui répond à la question.

Exemple : « Dans le quadrilatère EFGH, les diagonales [EG] et [FH] se coupent en leur milieu I. Or un quadrilatère dont les diagonales ont le même milieu est un parallélogramme. Donc EFGH est un parallélogramme. »

4. Construire un parallélogramme

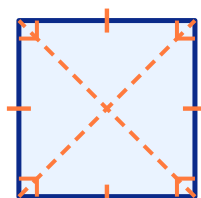
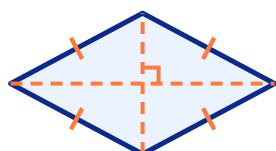
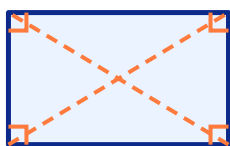
À partir de trois sommets A, B, C (règle et compas) On veut le parallélogramme ABCD. Comme $AD = BC$ et $CD = AB$: 1) trace A, B, C ; 2) prends l'écartement BC et trace un arc de cercle de centre A ; 3) prends l'écartement AB et trace un arc de centre C ; 4) les deux arcs se coupent en D, du côté opposé à B. Trace ensuite [AD] et [CD].



Autres méthodes Avec les diagonales : place O, trace deux droites qui se croisent en O, puis reporte des longueurs égales de part et d'autre de O sur chacune. **Sur un quadrillage** : si pour aller de A à B on avance de 4 carreaux à droite et 1 vers le haut, il faut faire le même déplacement pour aller de D à C.

5. Les parallélogrammes particuliers

Rectangle, losange, carré Un **rectangle** est un quadrilatère qui a quatre angles droits. Un **losange** est un quadrilatère qui a quatre côtés de même longueur. Un **carré** est un quadrilatère qui a quatre angles droits **et** quatre côtés égaux. Ce sont tous des parallélogrammes : ils ont donc toutes les propriétés du paragraphe 2.



Rectangle : 4 angles droits Losange : 4 côtés égaux Carré : les deux à la fois

Propriétés supplémentaires Rectangle : ses diagonales ont la même longueur.

Losange : ses diagonales sont perpendiculaires, et ce sont aussi ses axes de symétrie.

Carré : il cumule les deux, c'est un rectangle et un losange.

Pour démontrer qu'un parallélogramme est particulier Un parallélogramme qui a **un angle droit** est un rectangle ; un parallélogramme dont les **diagonales ont la même longueur** est un rectangle.

Un parallélogramme qui a **deux côtés consécutifs égaux** est un losange ; un parallélogramme dont les **diagonales sont perpendiculaires** est un losange.

Un parallélogramme qui est à la fois un rectangle et un losange est un carré.

Propriété	Parallélogramme	Rectangle	Losange	Carré
Côtés opposés parallèles et égaux	oui	oui	oui	oui
Diagonales de même milieu	oui	oui	oui	oui
Angles droits	non	oui	non	oui
Diagonales de même longueur	non	oui	non	oui
Quatre côtés égaux	non	non	oui	oui
Diagonales perpendiculaires	non	non	oui	oui

« non » signifie « pas toujours » : un parallélogramme peut avoir un angle droit, mais ce n'est pas obligatoire.

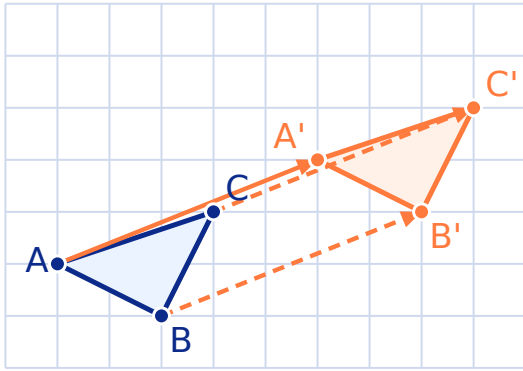
Exemple ABCD est un parallélogramme avec $AB = 5$ cm, $BC = 12$ cm et $AC = 13$ cm.

Comme $5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 = 13^2$, le triangle ABC est rectangle en B

(réciproque du théorème de Pythagore). Un parallélogramme qui a un angle droit est un rectangle : ABCD est un rectangle.

6. La translation

Translation Transformer une figure par une **translation**, c'est la faire **glisser** sans la tourner ni la retourner. Une translation est définie par un « trajet » : une **direction** (une droite), un **sens** et une **longueur**. On dit « la translation qui transforme A en A' » : elle est alors entièrement déterminée, car tous les points subissent le même trajet que A vers A'.



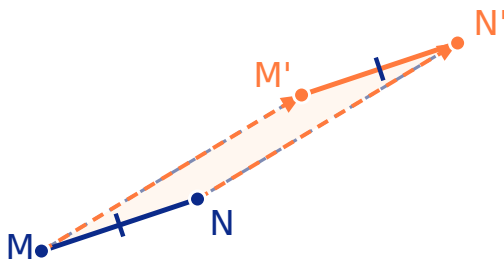
Chaque point de ABC glisse du même trajet que A vers A' : 5 carreaux vers la droite et 2 carreaux vers le haut.
Les flèches sont parallèles et de même longueur.

Construire l'image d'un point M par la translation qui transforme A en B Si M n'est pas sur la droite (AB), l'image M' est le point tel que **ABM'M soit un parallélogramme** : construis M' avec la méthode du paragraphe 4. Sur un quadrillage, on compte le déplacement de A vers B et on le répète depuis M. Pour une figure, on construit les images de ses sommets, puis on les relie.

Attention à l'ordre des lettres La translation qui transforme A en B n'est pas celle qui transforme B en A : elle va dans le sens contraire. Le parallélogramme est ABM'M ($A \rightarrow B$ et $M \rightarrow M'$ sont des côtés opposés), pas ABMM'.

7. Propriétés de la translation

Ce qui est conservé Une translation **conserve** l'alignement, les longueurs, les angles, les aires et le parallélisme. L'image d'un segment est un segment de même longueur, l'image d'un cercle est un cercle de même rayon, l'image d'une droite est une droite **parallèle**.



$[M'N']$ est l'image de $[MN]$. Le quadrilatère MNN'M' est un parallélogramme : $MN = M'N'$ et $(MN) \parallel (M'N')$. Les trajets MM' et NN' sont de même longueur.

Lien avec le parallélogramme Si ABCD est un parallélogramme, la translation qui transforme A en B transforme aussi D en C. Réciproquement, si la translation qui transforme A en B transforme C en D, alors ABDC est un parallélogramme (si les quatre

Fiche en ligne : maths-facile.eu/parallelogrammes-et-translations-cours-4eme/ · Cours, exercices et contrôles corrigés

points ne sont pas alignés).

	Symétrie axiale	Symétrie centrale	Translation
Ce qui la définit	une droite (l'axe)	un point (le centre)	un « trajet » : direction, sens, longueur
Effet sur la figure	retournement	demi-tour	glissement sans tourner
Longueurs, angles, aires	conservés	conservés	conservés
Droite et son image	pas toujours parallèles	toujours parallèles	toujours parallèles
Figure image dans la même position	non, elle est retournée	non, elle est à l'envers	oui, même orientation

Mathbot, le robot-coach Pour savoir quelle transformation a été utilisée, regarde l'image d'une petite flèche tracée sur la figure : si elle pointe dans la même direction, c'est une translation ; si elle pointe dans la direction opposée, c'est une symétrie centrale ; si elle est retournée comme dans un miroir, c'est une symétrie axiale.

8. Frises, pavages et problèmes

Une **frise** est obtenue en répétant un motif par translations successives, toujours du même trajet. Un **pavage** couvre le plan avec une figure répétée, par translations, parfois aussi par symétries centrales : c'est le cas de nombreux carrelages en losanges ou en parallélogrammes.

Résoudre un problème de géométrie 1) Fais une figure soignée en y mettant les données et en codant les égalités. 2) Cherche la propriété qui relie les données à la question (parallélogramme ? centre de symétrie ? translation ?). 3) Rédige : donnée, propriété citée, conclusion. 4) Relis : as-tu utilisé la bonne réciproque ?

Exemple de problème Dans le parallélogramme ABCD, on place E symétrique de A par rapport à B. Montre que BECD est un parallélogramme. — On sait que ABCD est un parallélogramme, donc $AB = DC$ et $(AB) \parallel (DC)$, avec $A \rightarrow B$ et $D \rightarrow C$ dans le même sens. Comme E est le symétrique de A par rapport à B, B est le milieu de [AE] : $BE = AB$, et E est sur (AB), dans le prolongement de $A \rightarrow B$. Donc $BE = DC$, $(BE) \parallel (DC)$ avec le même sens de B vers E que de D vers C. Un quadrilatère qui a deux côtés opposés parallèles et de même longueur est un parallélogramme : **BECD est un parallélogramme.**

À retenir

- Un parallélogramme a ses côtés opposés parallèles ; ses côtés opposés sont égaux,

Fiche en ligne : maths-facile.eu/parallelogrammes-et-translations-cours-4eme/ · Cours, exercices et contrôles corrigés

ses angles opposés sont égaux, ses angles consécutifs sont supplémentaires, ses diagonales se coupent en leur milieu (centre de symétrie).

- Pour démontrer qu'un quadrilatère non croisé est un parallélogramme : côtés opposés parallèles, ou diagonales de même milieu, ou côtés opposés égaux, ou deux côtés opposés parallèles et égaux, ou angles opposés égaux.
- Rectangle : un angle droit ou diagonales égales ; losange : deux côtés consécutifs égaux ou diagonales perpendiculaires ; carré : les deux à la fois.
- Une translation fait glisser une figure : elle est définie par une direction, un sens et une longueur (« la translation qui transforme A en B »).
- La translation conserve longueurs, angles, aires, alignement ; l'image d'une droite est une droite parallèle.
- Si la translation qui transforme A en B transforme C en D, alors ABDC est un parallélogramme.