

Primitives et équations différentielles

Corrigé du contrôle - Terminale

Durée conseillée : 45 minutes. Barème sur 20 points. Calculatrice interdite.

1 Primitives usuelles et composées / 4 pts

- $F(x) = x^4 - x^3 + 2x$. (1 pt)
- $G(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + 3 \ln(x)$. (1 pt)
- $u = x^3 - 1$, $u' = 3x^2$: $h = u' u^3$, donc $H(x) = \frac{(x^3-1)^4}{4}$. (1 pt)
- Une primitive de $\cos(3x)$ est $\frac{1}{3}\sin(3x)$. Avec $u = x^2 + 1 > 0$, $\frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{2} \times \frac{u'}{u}$ a pour primitive $\frac{1}{2}\ln(x^2 + 1)$. Donc $K(x) = \frac{1}{3}\sin(3x) + \frac{1}{2}\ln(x^2 + 1)$. (1 pt)

2 Primitive avec condition initiale / 3 pts

Avec $u = x^2 + 1 > 0$: $\frac{4x}{x^2+1} = 2 \times \frac{u'}{u}$, de primitive $2 \ln(x^2 + 1)$. Une primitive de e^{-x} est $-e^{-x}$. (1,5 pt)

Donc $F(x) = 2 \ln(x^2 + 1) - e^{-x} + C$. (0,5 pt)

$F(0) = 0 - 1 + C = 1$, donc $C = 2$ et $F(x) = 2 \ln(x^2 + 1) - e^{-x} + 2$. (1 pt)

3 Équations différentielles du premier ordre / 4 pts

- Les solutions sont Ce^{-3x} (0,5 pt). $y(0) = C = 5$, donc $y(x) = 5e^{-3x}$. (1 pt)
- La solution constante est $-\frac{8}{4} = -2$. (1 pt) Les solutions sont $y(x) = Ce^{4x} + 2$. (0,5 pt) $y(0) = C + 2 = -1$ donne $C = -3$. Donc $y(x) = -3e^{4x} + 2$. (1 pt)

4 Équation avec solution particulière / 4 pts

- $g'(x) = 3$. Et $2g(x) + 1 - 6x = 6x + 2 + 1 - 6x = 3$. Égalité vérifiée, g est solution. (1 pt)
- Les solutions de $y' = 2y$ sont Ce^{2x} . (1 pt)
- y est solution de (E) si et seulement si $y - g$ est solution de $y' = 2y$. Les solutions de (E) sont $y(x) = Ce^{2x} + 3x + 1$. (1 pt) $f(0) = C + 1 = 0$ donne $C = -1$, donc $f(x) = -e^{2x} + 3x + 1$. (1 pt)

5 Un gâteau qui refroidit / 5 pts

- $T' = -0,1T + 2$: la solution constante est 20. (0,5 pt) $T(t) = 20 + Ce^{-0,1t}$. (0,5 pt)

$T(0) = 20 + C = 180$ donne $C = 160$. $T(t) = 20 + 160e^{-0,1t}$. (1 pt)

b. $T(15) = 20 + 160e^{-1,5} \approx 55,7$ °C. (1 pt)

c. $20 + 160e^{-0,1t} = 40$ équivaut à $e^{-0,1t} = \mathbf{1/8}$. (1 pt) Donc $-0,1t = -\ln 8$, $t = 10 \ln 8 \approx 20,8$ minutes : environ 21 minutes. (1 pt) Calculatrice autorisée pour cet exercice.