

Primitives et équations différentielles

Corrigé des exercices - Terminale

Corrigé détaillé des exercices du chapitre. Vérifie tes réponses étape par étape et corrige-toi.

1 Vrai ou faux ? ★★★

- a. Vrai : $(x^4)' = 4x^3 = f(x)$.
- b. Faux : $(x^2)' = 2x \neq 2x + 1$. Une primitive de g est $x^2 + x$.
- c. Vrai : $(x^2 + 10)' = 2x$. Deux primitives diffèrent d'une constante.
- d. Faux : $\ln$ n'est pas définie sur $\mathbb{R}$ (elle l'est sur $]0 ; +\infty[$ seulement). La propriété est vraie sur $]0 ; +\infty[$, pas sur $\mathbb{R}$.

2 Primitives usuelles ★★★

- a. $F(x) = x^6/6$.
- b. $F(x) = x^4$, car $(x^4)' = 4x^3$.
- c. $F(x) = x^3 - x^2 + x$.
- d. $F(x) = e^x + \sin(x)$.
- e. $F(x) = -1/x$, car $(-1/x)' = 1/x^2$.
- f. Une primitive de $1/\sqrt{x}$ est $2\sqrt{x}$, donc $F(x) = 3 \times 2\sqrt{x} = 6\sqrt{x}$.

3 Primitive passant par un point ★★★

Les primitives de f sont $F(x) = 2x^3 - 2x^2 + x + C$.

Condition : $F(1) = 2 - 2 + 1 + C = 1 + C = 3$, donc $C = 2$.

La primitive cherchée est $F(x) = 2x^3 - 2x^2 + x + 2$.

4 Forme $u'u^n$ ★★★

- a. $u = x^2 + 1$, $u' = 2x$: $f = u'u^4$, donc $F(x) = (x^2+1)^5/5$.
- b. $u = 3x - 2$, $u' = 3$: $g = 1/3 u'u^3$, donc $G(x) = 1/3 \times (3x-2)^4/4 = (3x-2)^4/12$.
- c. $u = x^2 + 3$, $u' = 2x$: $h = 1/2 u'u^2$, donc $H(x) = 1/2 \times (x^2+3)^3/3 = (x^2+3)^3/6$.

5 Forme u'/u ★★★

- a. $u = x^2 + 1 > 0$, $u' = 2x$: $F(x) = \ln(x^2 + 1)$.

- b. $u = 2x + 3 > 0$ sur l'intervalle, $u' = 2$: $g = \mathbf{1/2} \times u'/u$, donc $G(x) = \mathbf{1/2} \ln(2x + 3)$.
 c. $u = x^3 + 1 > 0$ sur $] -1 ; +\infty[$, $u' = 3x^2$: $H(x) = \ln(x^3 + 1)$.

6 Exponentielles ★★★

- a. $F(x) = \mathbf{1/3}e^{3x}$.
 b. $a = -2$: $G(x) = -\mathbf{1/2}e^{-2x+1}$.
 c. $u = x^2$, $u' = 2x$: $h = \mathbf{1/2}u'e^u$, donc $H(x) = \mathbf{1/2}e^{x^2}$.

7 Cosinus et sinus ★★★

- a. $F(x) = \mathbf{1/2}\sin(2x)$.
 b. $G(x) = -\mathbf{1/3}\cos(3x + 1)$.
 c. Ici $a = \mathbf{1/2}$, donc $H(x) = 2 \sin(\mathbf{x/2})$. Vérification : $(2 \sin(\mathbf{x/2}))' = 2 \times \mathbf{1/2}\cos(\mathbf{x/2}) = \cos(\mathbf{x/2})$.

8 Deux équations simples ★★★

- a. Les solutions sont Ce^{3x} . $y(0) = C = 2$. La solution est $y(x) = 2e^{3x}$.
 b. Les solutions sont Ce^{-2x} . $y(1) = Ce^{-2} = 5$ donne $C = 5e^2$. La solution est $y(x) = 5e^2e^{-2x} = 5e^{2-2x}$.

9 Mettre sous la forme $y' = ay$ ★★★

- a. $y' = 5y$: $y(x) = Ce^{5x}$.
 b. $y' = -5y$: $y(x) = Ce^{-5x}$.
 c. $y' = \mathbf{2/3}y$: $y(x) = Ce^{2x/3}$.

10 Équation avec second membre constant ★★★

Ici $a = 1$ et $b = 3$. La solution constante est $-\mathbf{3/1} = -3$. Les solutions sont $y(x) = Ce^x - 3$.

$y(0) = C - 3 = 0$ donne $C = 3$. Donc $y(x) = 3e^x - 3$.

11 Développer avant de primitiver ★★★

On développe : $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$. Les primitives sont $\mathbf{x^5/5} - \mathbf{2x^3/3} + x + C$.

$F(0) = C = 0$. Donc $F(x) = \mathbf{x^5/5} - \mathbf{2x^3/3} + x$.

12 Un trinôme sous le logarithme ★★★

Le discriminant est $\Delta = 9 - 20 = -11 < 0$ et le coefficient de x^2 est positif : le trinôme est strictement positif sur $\mathbb{R}$.

Avec $u = x^2 + 3x + 5 > 0$ et $u' = 2x + 3$, on a $f = u'/u$. Une primitive est $F(x) = \ln(x^2 + 3x + 5)$.

13 Un produit sinus-cosinus ★★★

$u = \cos(x)$, $u' = -\sin(x)$. Alors $f = -u'u^2$. Une primitive de $u'u^2$ est $u^3/3$, donc $F(x) = -\cos^3(x)/3$.

Vérification : $F'(x) = -1/3 \times 3\cos^2(x) \times (-\sin(x)) = \sin(x)\cos^2(x)$. ✓

14 Quotient d'exponentielles ★★★

$u(x) = e^x + 1 > 0$ sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = e^x$. Donc $f = u'/u$ et $F(x) = \ln(e^x + 1)$.

15 Une racine carrée ★★★

$u = x^2 + 1 > 0$, $u' = 2x$. On sait que $u'/\sqrt{u}$ a pour primitive $2\sqrt{u}$. Or $f = 1/2 \times u'/\sqrt{u}$, donc $F(x) = 1/2 \times 2\sqrt{x^2 + 1} = \sqrt{x^2 + 1}$.

Vérification : $F'(x) = 2x/2\sqrt{x^2+1} = x/\sqrt{x^2+1}$. ✓

16 Logarithme au numérateur ★★★

$u(x) = \ln(x)$ donne $u'(x) = 1/x$. Donc $f = u'u$, de primitive $u^2/2$. Ainsi $F(x) = (\ln x)^2/2$.

17 Équation avec condition initiale ★★★

$a = 2$, $b = -6$. La solution constante est $-b/a = 3$. Les solutions sont $y(x) = Ce^{2x} + 3$.

$y(0) = C + 3 = 1$ donne $C = -2$. Donc $y(x) = 3 - 2e^{2x}$.

18 Écrire l'équation sous forme réduite ★★★

L'équation s'écrit $y' = -4y + 8$. La solution constante est $-b/a = 2$. Les solutions sont $y(x) = Ce^{-4x} + 2$.

$f(0) = C + 2 = 5$ donne $C = 3$, donc $f(x) = 3e^{-4x} + 2$.

Comme $-4 < 0$, e^{-4x} tend vers 0 en $+\infty$: la limite de f est 2, la valeur d'équilibre.

19 $y' = f$ avec condition ★★★

y est une primitive de $3x^2 - 2$: $y(x) = x^3 - 2x + C$.

$y(1) = 1 - 2 + C = 4$ donne $C = 5$. Donc $y(x) = x^3 - 2x + 5$.

20 Un coefficient fractionnaire ★★★

$a = -3$, $b = 3/2$. La solution constante est $-3/2 \div (-3) = 1/2$. Les solutions sont $y(x) = Ce^{-3x} + 1/2$.

$y(0) = C + 1/2 = 0$ donne $C = -1/2$. Donc $y(x) = 1/2 - 1/2e^{-3x} = 1/2(1 - e^{-3x})$.

21 Mouvement d'un mobile ★★★

a. $v(t) = 3t^2 - 2t + C$ et $v(0) = C = 1$. Donc $v(t) = 3t^2 - 2t + 1$.

b. $x(t) = t^3 - t^2 + t + K$ et $x(0) = K = 0$. Donc $x(t) = t^3 - t^2 + t$.

c. $v(3) = 27 - 6 + 1 = 22$ m/s et $x(3) = 27 - 9 + 3 = 21$ m.

22 Un facteur qui disparaît à l'intérieur ★★★

$u(x) = x^2 + x$, $u'(x) = 2x + 1$. Donc $f = u' e^u$, de primitive e^u . Les primitives sont $e^{x^2+x} + C$.

$F(0) = e^0 + C = 1 + C = 0$, donc $C = -1$. $F(x) = e^{x^2+x} - 1$.

23 Linéariser un carré ★★★

On écrit $f(x) = 1/2 + 1/2\cos(2x)$. Une primitive de $1/2$ est $x/2$. Une primitive de $\cos(2x)$ est $1/2\sin(2x)$, donc une primitive de $1/2\cos(2x)$ est $1/4\sin(2x)$.

Ainsi $F(x) = x/2 + \sin(2x)/4$.

Vérification : $F'(x) = 1/2 + 2\cos(2x)/4 = 1 + \cos(2x)/2$. ✓

24 Équation avec solution particulière ★★★

a. $g'(x) = -2$ et $2g(x) + 4x = -4x - 2 + 4x = -2$. Les deux membres sont égaux : g est solution.

b. Les solutions de $y' = 2y$ sont Ce^{2x} .

- c. Une fonction y est solution de (E) si et seulement si $y - g$ est solution de $y' = 2y$.
Donc $y(x) = Ce^{2x} - 2x - 1$.
- d. $f(0) = C - 1 = 3$ donne $C = 4$. $f(x) = 4e^{2x} - 2x - 1$.

25 Refroidissement d'un café ★★★

- a. $T' = -kT + 20k$: la solution constante est 20, donc $T(t) = 20 + Ce^{-kt}$. $T(0) = 20 + C = 90$ donne $C = 70$. $T(t) = 20 + 70e^{-kt}$.
- b. $T(10) = 60$: $70e^{-10k} = 40$, soit $e^{-10k} = \mathbf{4/7}$. En prenant $\ln$: $-10k = \ln(\mathbf{4/7})$, donc $k = [\ln(7/4)/10] \approx 0,056 \text{ min}^{-1}$.
- c. $T(t) = 30$: $70e^{-kt} = 10$, $e^{-kt} = \mathbf{1/7}$, donc $t = \mathbf{\ln 7/k} = [10 \ln 7 / \ln(7/4)] \approx 34,8$ minutes. Le café est à 30 °C après environ 35 minutes.

26 Décroissance radioactive ★★★

- a. $N(t) = 800e^{-\lambda t}$. La demi-vie vérifie $e^{-5\lambda} = \mathbf{1/2}$, donc $\lambda = \mathbf{\ln 2/5} \approx 0,139 \text{ an}^{-1}$. Ainsi $N(t) = 800e^{-t \ln 2/5} = 800 \times 2^{-t/5}$.
- b. $N(12) = 800 \times 2^{-12/5} \approx 151,6 \text{ g}$.
- c. $800e^{-\lambda t} = 80$ donne $e^{-\lambda t} = 0,1$, soit $t = \mathbf{\ln 10/\lambda} = \mathbf{5 \ln 10 / \ln 2} \approx 16,6 \text{ ans}$.

27 Concentration d'un médicament ★★★

- a. $a = -0,25$ et $b = 3$. La solution constante est $\mathbf{-3/-0,25} = 12$. Donc $C(t) = Ke^{-0,25t} + 12$. $C(0) = K + 12 = 0$ donne $K = -12$: $C(t) = 12(1 - e^{-t/4})$.
- b. $e^{-t/4}$ tend vers 0, donc $C(t)$ tend vers 12. La concentration se stabilise à 12 mg/L : c'est l'équilibre entre l'apport et l'élimination.
- c. $12(1 - e^{-t/4}) = 9$ équivaut à $e^{-t/4} = \mathbf{1/4}$, soit $t = 4 \ln 4 \approx 5,55$ heures, soit environ 5 h 33 min.

28 Les primitives d'une fonction et leur graphique ★★★

- a. $F(x) = 12 - 12e^{-x/4}$, donc $F'(x) = -12 \times (\mathbf{-1/4})e^{-x/4} = 3e^{-x/4}$. D'autre part, $-0,25F(x) + 3 = -3 + 3e^{-x/4} + 3 = 3e^{-x/4}$. Les deux expressions sont égales.
- b. $F'(x) = 3e^{-x/4} > 0$ pour tout x : F est strictement croissante.
- c. La droite $y = 12$ est asymptote horizontale à la courbe en $+\infty$, car $F(x)$ tend vers 12.