

Primitives et équations différentielles

Cours de maths - Terminale

Tu sais dériver : à partir d'une fonction, tu fabriques sa fonction dérivée, qui donne la vitesse de variation. Dans ce chapitre, tu apprends à faire le chemin **inverse** : retrouver une fonction quand on connaît sa dérivée. C'est l'idée de la **primitive**. Cet outil permet ensuite de résoudre des **équations différentielles**, c'est-à-dire des équations dont l'inconnue est une fonction. Elles décrivent un café qui refroidit, un médicament qui s'élimine du sang, un noyau radioactif qui se désintègre. Tu vas voir qu'une seule fonction, l'exponentielle, résout presque tout.

1. Primitives d'une fonction

Définition : primitive

Soit f une fonction définie sur un intervalle I . Une **primitive** de f sur I est une fonction F dérivable sur I telle que, pour tout x de I , $F'(x) = f(x)$.

Exemple

La fonction $F : x \mapsto x^3$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de $f : x \mapsto 3x^2$, car $(x^3)' = 3x^2$. Mais $G : x \mapsto x^3 + 7$ en est une aussi, puisque la dérivée d'une constante est nulle.

Théorème : existence (admis)

Toute fonction f **continue** sur un intervalle I admet des primitives sur I .

Propriété : toutes les primitives

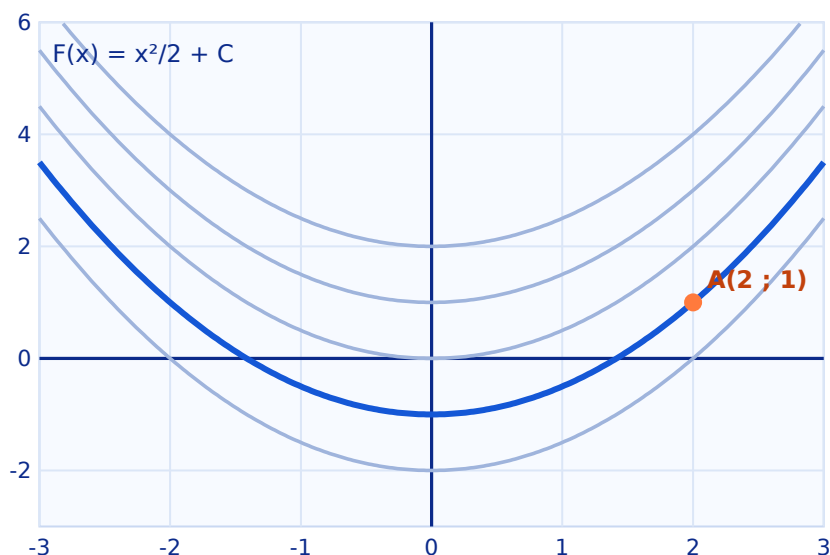
Si F est une primitive de f sur l'intervalle I , alors les primitives de f sur I sont exactement les fonctions $x \mapsto F(x) + C$, où C est un réel quelconque.

Démonstration. D'abord, $F + C$ est dérivable et sa dérivée est $F' + 0 = f$: c'est bien une primitive. Réciproquement, soit G une primitive de f sur I . Alors $(G - F)' = f - f = 0$ sur l'intervalle I . Une fonction de dérivée nulle sur un intervalle est constante : il existe donc un réel C tel que $G - F = C$, soit $G = F + C$. ■

Piège : l'intervalle compte

Le résultat « deux primitives diffèrent d'une constante » ne vaut que **sur un intervalle**. Sur $\mathbb{R}$ privé de 0, par exemple, une primitive peut avoir une constante différente à gauche et à droite de 0. On travaille donc toujours sur un intervalle précisé.

Graphiquement, les courbes des primitives d'une même fonction se déduisent les unes des autres par une **translation verticale**. Ci-dessous, les primitives de $f(x) = x$: toutes les paraboles $y = x^2/2 + C$.



Propriété : condition initiale

Soit f continue sur I , x_0 un réel de I et y_0 un réel. Il existe **une seule** primitive G de f sur I telle que $G(x_0) = y_0$.

Démonstration. Soit F une primitive de f . Les primitives sont $F + C$. La condition $F(x_0) + C = y_0$ impose $C = y_0 - F(x_0)$: une valeur et une seule. ■ Sur la figure, la seule parabole qui passe par $A(2; 1)$ est celle de $C = -1$.

2. Primitives des fonctions usuelles

Lire à l'envers le tableau des dérivées donne les primitives usuelles. Ici, C désigne une constante réelle.

Fonction $f(x)$	Une primitive $F(x)$	Intervalle
k (constante)	kx	$\mathbb{R}$
x^n , n entier naturel	$[[x^{n+1}/n+1]]$	$\mathbb{R}$
x^n , n entier ≤ -2 (ex. $1/x^2$, $1/x^3$)	$[[x^{n+1}/n+1]]$ (ex. $-1/x$, $-1/2x^2$)	$]0; +\infty[$ ou $]-\infty; 0[$
$1/x$	$\ln(x)$	$]0; +\infty[$
$1/\sqrt{x}$	$2\sqrt{x}$	$]0; +\infty[$

Fonction $f(x)$	Une primitive $F(x)$	Intervalle
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\mathbb{R}$

Vérifie toujours en dérivant

Pour être sûr d'une primitive, dérive-la : tu dois retrouver exactement f . C'est un contrôle rapide qui évite beaucoup d'erreurs de signe ou de facteur.

Propriété : linéarité

Si F et G sont des primitives de f et g sur I , et si λ est un réel, alors $F + G$ est une primitive de $f + g$, et λF est une primitive de λf .

Exemple résolu

Primitive de $f(x) = 3x^2 + 2x - 5 + 4e^x$ sur $\mathbb{R}$. On traite chaque terme : $3x^3/3 = x^3$; $2x^2/2 = x^2$; $-5x$; $4e^x$. Une primitive est $F(x) = x^3 + x^2 - 5x + 4e^x$, et toutes les autres s'obtiennent en ajoutant une constante.

Piège : le produit et le quotient

Il n'existe pas de règle « primitive d'un produit = produit des primitives ». Par exemple, une primitive de $x \times e^x$ n'est pas $x^2/2 \times e^x$. En revanche, il faut **développer** (ou transformer) avant de chercher une primitive : $(x + 1)^2$ se développe en $x^2 + 2x + 1$.

3. Primitives de fonctions composées

Les formules de dérivation des fonctions composées donnent des primitives pour des fonctions de la forme $u' \times$ (quelque chose de u). Dans le tableau, u est une fonction dérivable sur I .

Forme de f	Une primitive de f	Condition
$u' u^n$	$[[u^{n+1}/(n+1)]]$	n entier, $n \neq -1$; $u \neq 0$ si $n < 0$
u'/u^2	$-1/u$	u ne s'annule pas
u'/u	$\ln(u)$	$u > 0$ sur I
$u'/\sqrt{u}$	$2\sqrt{u}$	$u > 0$ sur I
$u' e^u$	e^u	
$u' \cos(u)$	$\sin(u)$	

Forme de f	Une primitive de f	Condition
$u' \sin(u)$	$-\cos(u)$	

Cas particuliers très fréquents, avec $a \neq 0$ et b réels (ici $u(x) = ax + b$ et $u' = a$) : une primitive de e^{ax+b} est $\frac{1}{a} e^{ax+b}$; de $\cos(ax + b)$ est $\frac{1}{a} \sin(ax + b)$; de $\sin(ax + b)$ est $-\frac{1}{a} \cos(ax + b)$; de $(ax + b)^n$ est $[(ax+b)^{n+1}/a(n+1)]$.

Méthode : reconnaître la forme $u' \times \dots$

1. Repère la fonction « à l'intérieur » : c'est u . Calcule u' .
2. Compare avec f . Si u' est présent au facteur multiplicatif près, ajuste avec une constante (on peut multiplier et diviser par un même nombre).
3. Écris la primitive correspondante du tableau.
4. Dérive pour vérifier.

Exemples résolus

- a. $f(x) = \mathbf{x/x^2+4}$ sur $\mathbb{R}$. Avec $u(x) = x^2 + 4 > 0$, on a $u'(x) = 2x$. Donc $f = \mathbf{1/2 \times u'/u}$ et $F(x) = \mathbf{1/2 \ln(x^2 + 4)}$.
- b. $f(x) = (2x - 1)(x^2 - x + 3)^3$. Avec $u = x^2 - x + 3$, $u' = 2x - 1 : f = u' u^3$, d'où $F(x) = \mathbf{(x^2-x+3)^4/4}$.
- c. $f(x) = e^{-3x}$ sur $\mathbb{R}$: ici $a = -3$, donc $F(x) = \mathbf{-1/3 e^{-3x}}$.
- d. $f(x) = \mathbf{1/(1-2x)^2}$ sur $] -\infty ; 1/2[$. Avec $u = 1 - 2x$, $u' = -2 : f = \mathbf{-1/2 \times u'/u^2}$, donc $F(x) = \mathbf{-1/2 \times (-1/u) = 1/2(1-2x)}$.

Piège : la constante ne se « glisse » pas n'importe où

On peut ajuster par une constante, jamais par une variable. La fonction xe^{x^2} se traite avec $u = x^2$ ($u' = 2x$) : on obtient $\frac{1}{2}e^{x^2}$. Mais e^{x^2} seule n'a pas de primitive qui s'écrive avec les fonctions usuelles : le facteur x manque, et on ne peut pas l'inventer.

4. Déterminer une primitive avec une condition initiale

Méthode

1. Trouve une primitive F de f et écris la forme générale $F(x) + C$.
2. Écris la condition : $F(x_0) + C = y_0$.
3. Résous cette équation d'inconnue C .
4. Conclut par une phrase : « La primitive cherchée est ... ».

Exemple résolu

Soit $f(x) = e^{2x} + x$. On cherche la primitive G de f sur $\mathbb{R}$ telle que $G(0) = 3$. Les

Fiche en ligne : maths-facile.eu/primitives-et-equations-differentielles-cours-terminale/ · Cours, exercices et contrôles

primitives de f sont $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{x^2}{2} + C$. Alors $G(0) = \frac{1}{2} + 0 + C = 3$, donc $C = \frac{5}{2}$. La primitive cherchée est $G(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{2}$.

5. L'équation différentielle $y' = ay$

Définition : équation différentielle

Une **équation différentielle** est une équation dont l'inconnue est une **fonction** y et dans laquelle figure sa dérivée y' . Une **solution** sur $\mathbb{R}$ est une fonction dérivable qui vérifie l'égalité pour tout réel x . On note souvent l'équation (E).

Théorème : solutions de $y' = ay$

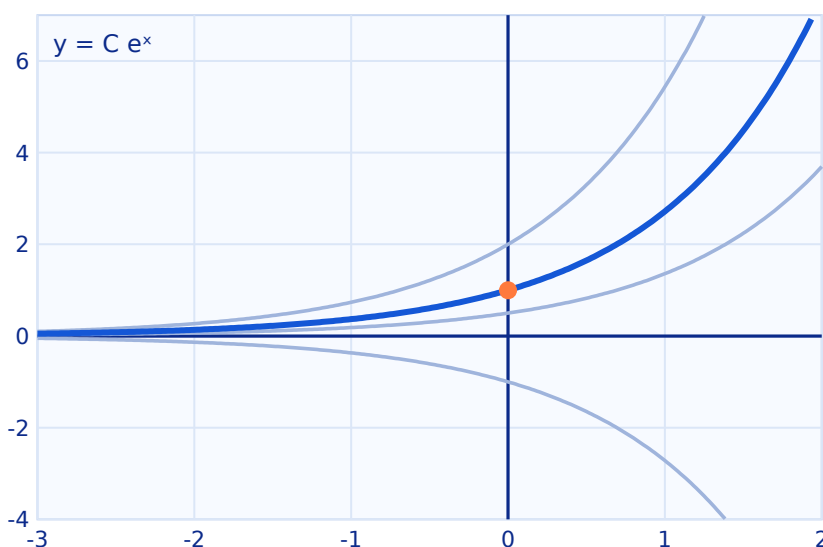
Soit a un réel. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y' = ay$ sont les fonctions $x \mapsto Ce^{ax}$, où C est un réel quelconque.

Démonstration. Si $y(x) = Ce^{ax}$, alors $y'(x) = Ca e^{ax} = ay(x)$: ce sont bien des solutions. Réciproquement, soit g une solution. On pose $h(x) = g(x)e^{-ax}$. Alors $h'(x) = g'(x)e^{-ax} - ag(x)e^{-ax} = (g'(x) - ag(x))e^{-ax} = 0$. Donc h est constante, égale à un réel C , et $g(x) = Ce^{ax}$. ■

Propriété : condition initiale

Pour tous réels x_0 et y_0 , l'équation $y' = ay$ admet **une unique solution** telle que $y(x_0) = y_0$. C'est $y(x) = y_0 e^{a(x-x_0)}$.

En effet, $Ce^{ax_0} = y_0$ donne $C = y_0 e^{-ax_0}$, d'où l'expression annoncée. Voici les solutions de $y' = y$ ($a = 1$) ; celle qui vaut 1 en 0 est l'exponentielle elle-même.



Exemples résolus

- a. $y' = -2y$ avec $y(0) = 3$. Les solutions sont Ce^{-2x} ; $y(0) = C = 3$. Donc $y(x) = 3e^{-2x}$.
- b. $y' = 3y$ avec $y(2) = 1$. Les solutions sont Ce^{3x} ; $y(2) = Ce^6 = 1$ donne $C = e^{-6}$. Donc $y(x) = e^{-6}e^{3x} = e^{3x-6}$.

Piège : l'équation s'écrit sous la forme « $y' = \dots$ »

Avant d'appliquer le théorème, isole y' . L'équation $2y' = 6y$ devient $y' = 3y$, de solutions Ce^{3x} (et pas Ce^{6x}). L'équation $y' + 4y = 0$ devient $y' = -4y$: le coefficient a est -4 .

6. L'équation différentielle $y' = ay + b$

Théorème

Soit a un réel non nul et b un réel. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de $y' = ay + b$ sont les fonctions $x \mapsto Ce^{ax} - b/a$, où C est un réel quelconque.

Démonstration. La fonction constante $y_p = -b/a$ est solution : sa dérivée est 0 et $a \times (-b/a) + b = 0$. Soit g une fonction dérivable. Alors $g' = ag + b$ équivaut, en retranchant l'égalité vérifiée par y_p , à $(g - y_p)' = a(g - y_p)$. Donc g est solution si et seulement si $g - y_p$ est solution de $y' = ay$, c'est-à-dire $g - y_p = Ce^{ax}$. ■

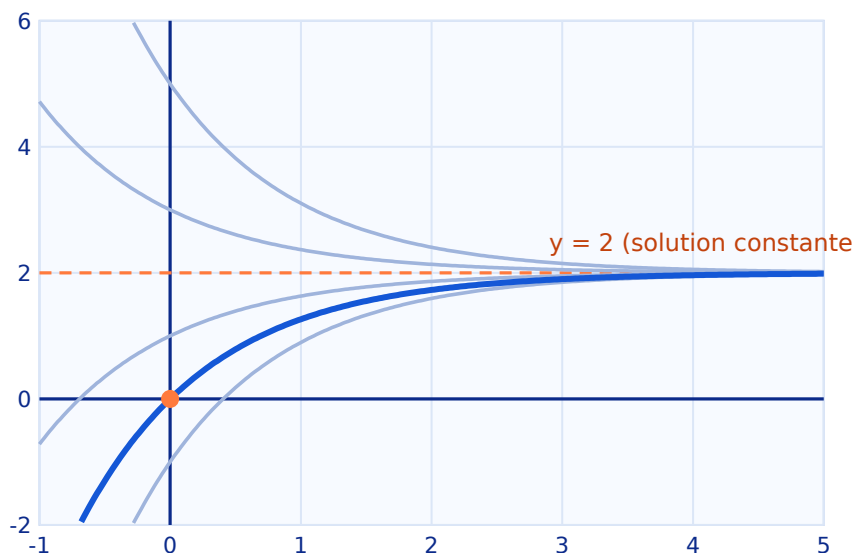
Méthode : résoudre $y' = ay + b$

1. Mets l'équation sous la forme $y' = ay + b$.
2. Trouve la solution constante : b/a change de signe, elle vaut $-b/a$.
3. Écris les solutions : $Ce^{ax} - b/a$.
4. Avec une condition initiale, remplace x puis résous l'équation d'inconnue C .

Exemple résolu

Résoudre $y' = -2y + 8$ avec $y(0) = 1$. Ici $a = -2$ et $b = 8$. La solution constante est $-8/-2 = 4$. Les solutions sont $y(x) = Ce^{-2x} + 4$. La condition donne $C + 4 = 1$, donc $C = -3$ et $y(x) = 4 - 3e^{-2x}$. Vérification : $y'(x) = 6e^{-2x}$ et $-2y(x) + 8 = -8 + 6e^{-2x} + 8 = 6e^{-2x}$. ✓

Quand $a < 0$, tous les termes Ce^{ax} tendent vers 0 en $+\infty$: **toutes les solutions se rapprochent de la solution constante**. Voici les solutions de $y' = -y + 2$, avec la droite $y = 2$ en pointillés ; la courbe en trait épais est celle qui part de 0.



Lire le comportement sans résoudre

Pour $y' = ay + b$ avec $a < 0$, la valeur d'équilibre $-\mathbf{b/a}$ est la limite en $+\infty$ de toutes les solutions. Avec $a > 0$, les solutions s'éloignent de cette valeur, sauf la solution constante.

7. Les équations $y' = f$ et $y' = ay + f$

Propriété : $y' = f$

Si f est continue sur un intervalle I , les solutions de $y' = f$ sur I sont exactement les **primitives** de f : $y = F + C$. Avec une condition initiale, la solution est unique.

Exemple résolu

$y' = \cos(x)$ avec $y(0) = 2$. Les solutions sont $y(x) = \sin(x) + C$; $y(0) = C = 2$. Donc $y(x) = \sin(x) + 2$.

Quand le second membre contient une fonction f , l'équation $y' = ay + f$ se traite de la même façon que dans la partie 6, à **condition de connaître une solution particulière** y_p . L'énoncé la donne ou la fait deviner (souvent une fonction affine).

Propriété

Si y_p est une solution particulière de $y' = ay + f$, alors les solutions sont les fonctions $x \mapsto \mathbf{Ce^{ax} + y_p(x)}$.

La preuve est celle de la partie 6 : la différence de deux solutions est solution de $y' = ay$.

Exemple résolu

Soit (E) : $y' = -y + 2x$.

- Vérifier que $y_p(x) = 2x - 2$ est solution. On a $y_p' = 2$ et $-y_p + 2x = -2x + 2 + 2x = 2$. ✓
- Les solutions de (E) sont $y(x) = Ce^{-x} + 2x - 2$.
- Avec $y(0) = 0$: $C - 2 = 0$, donc $C = 2$ et $y(x) = 2e^{-x} + 2x - 2$.

8. Modéliser avec une équation différentielle

Beaucoup de phénomènes obéissent à une règle du type « **la vitesse de variation est proportionnelle à l'écart avec une valeur d'équilibre** ». On les traduit par $y' = ay + b$.

Méthode : de la situation à la solution

- Choisis la fonction inconnue (température $T(t)$, quantité $N(t)$...) et précise l'unité de t .
- Traduis la loi du phénomène par une équation différentielle.
- Résous-la, puis utilise les données (condition initiale, une mesure) pour trouver les constantes.
- Réponds aux questions (valeur à un instant, instant atteignant un seuil) en résolvant une équation avec l'exponentielle, souvent grâce à $\ln$.
- Conclus par une phrase avec l'unité.

Deux modèles classiques

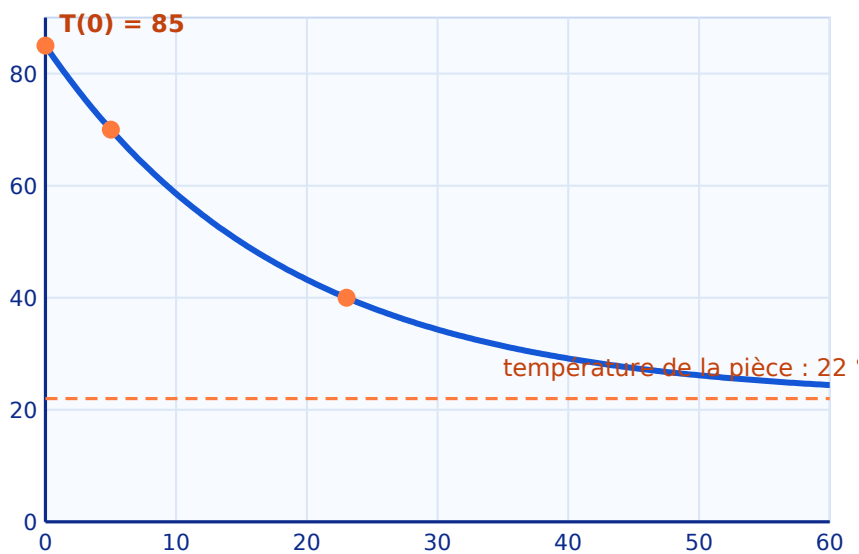
- Loi de refroidissement (Newton)** : la température T d'un objet placé dans un milieu à température constante T_m vérifie $T' = -k(T - T_m)$ avec $k > 0$. Les solutions sont $T(t) = T_m + Ce^{-kt}$.
- Désintégration radioactive** : le nombre de noyaux N vérifie $N' = -\lambda N$ avec $\lambda > 0$. Donc $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$. La **demi-vie** $t_{1/2}$, durée au bout de laquelle il reste la moitié des noyaux, vérifie $e^{-\lambda t_{1/2}} = 1/2$, soit $t_{1/2} = \ln 2 / \lambda$.

Exemple résolu : une tasse de thé

Un thé à 85 °C est posé dans une pièce à 22 °C. Après 5 minutes, il est à 70 °C. La température $T(t)$ (en °C, t en minutes) vérifie $T' = -k(T - 22)$, c'est-à-dire $T' = -kT + 22k$. La solution constante est 22, donc $T(t) = 22 + Ce^{-kt}$. Comme $T(0) = 85$, $C = 63$.

Pour trouver k : $T(5) = 70$ donne $63e^{-5k} = 48$, soit $e^{-5k} = 16/21$, d'où $k = [\ln(21/16)/5] \approx 0,0544 \text{ min}^{-1}$.

Quand le thé est-il à 40 °C ? $22 + 63e^{-kt} = 40$ équivaut à $e^{-kt} = \mathbf{18/63} = \mathbf{2/7}$, soit $t = [\ln(7/2)/k] \approx 23,0$ minutes. Le thé est à 40 °C après environ 23 minutes.



Piège : ln et exponentielle

Pour isoler t dans $e^{-kt} = m$ (avec $m > 0$), on applique $\ln$: $-kt = \ln(m)$. Si $m < 1$, $\ln(m)$ est négatif et on trouve bien un temps positif. Contrôles toujours que ton résultat est cohérent (une durée négative signale une erreur).

Mathbot

Bip ! Quand une équation différentielle te fait peur, regarde seulement le signe de a : s'il est négatif, ton phénomène « se calme » vers un équilibre ; s'il est positif, il « s'emballe ». Le reste n'est que de l'arithmétique avec des exponentielles.

À retenir

- F est une primitive de f sur I si $F' = f$ sur I . Si F en est une, les autres sont $F + C$ (C réel) ; une condition $F(x_0) = y_0$ fixe C .
- Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives.
- Usuelles : kx ; $[x^{n+1}/(n+1)]$; $-1/x$ pour $1/x^2$; $\ln x$ pour $1/x$ ($x > 0$) ; $2\sqrt{x}$ pour $1/\sqrt{x}$; e^x ; $\sin$ pour $\cos$; $-\cos$ pour $\sin$.
- Composées : $u' u^n \rightarrow [u^{n+1}/(n+1)]$; $u'/u^2 \rightarrow -1/u$; $u'/u \rightarrow \ln u$ ($u > 0$) ; $u'/\sqrt{u} \rightarrow 2\sqrt{u}$; $u' e^u \rightarrow e^u$; $u' \cos u \rightarrow \sin u$; $u' \sin u \rightarrow -\cos u$.
- $y' = ay$ a pour solutions Ce^{ax} ; avec $y(x_0) = y_0$, la solution est unique : $y_0 e^{a(x-x_0)}$.
- $y' = ay + b$ ($a \neq 0$) a pour solutions $Ce^{ax} - b/a$; la solution constante $-b/a$ est la valeur d'équilibre.
- $y' = f$: les solutions sont les primitives de f . $y' = ay + f$: $Ce^{ax} + y_p$, où y_p est une solution particulière.

- Refroidissement : $T = T_m + Ce^{-kt}$. Décroissance radioactive : $N = N_0 e^{-\lambda t}$, demi-vie **$\ln 2/\lambda$** .
- Réflexe : dériver le résultat pour vérifier qu'on retrouve f (primitive) ou l'équation (solution).