

Primitives et équations différentielles

Exercices de maths - Terminale

28 exercices classés par difficulté (★ facile, ★★ moyen, ★★★ difficile). Cherche d'abord sans regarder le corrigé !

1 Vrai ou faux ? ★★★

Pour chaque affirmation, dis si elle est vraie ou fausse et justifie en dérivant.

- a. $F(x) = x^4$ est une primitive de $f(x) = 4x^3$ sur $\mathbb{R}$.
- b. $G(x) = x^2$ est une primitive de $g(x) = 2x + 1$ sur $\mathbb{R}$.
- c. $H(x) = x^2 + 10$ est aussi une primitive de $h(x) = 2x$ sur $\mathbb{R}$.
- d. La fonction $\ln$ est une primitive de $1/x$ sur $\mathbb{R}$.

2 Primitives usuelles ★★★

Donne une primitive de chaque fonction sur l'intervalle indiqué.

- a. $f(x) = x^5$ sur $\mathbb{R}$
- b. $f(x) = 4x^3$ sur $\mathbb{R}$
- c. $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ sur $\mathbb{R}$
- d. $f(x) = e^x + \cos(x)$ sur $\mathbb{R}$
- e. $f(x) = 1/x^2$ sur $]0 ; +\infty[$
- f. $f(x) = 3/\sqrt{x}$ sur $]0 ; +\infty[$

3 Primitive passant par un point ★★★

Soit $f(x) = 6x^2 - 4x + 1$. Détermine la primitive F de f sur $\mathbb{R}$ telle que $F(1) = 3$.

4 Forme $u'u^n$ ★★★

Donne une primitive sur $\mathbb{R}$ de chaque fonction.

- a. $f(x) = 2x(x^2 + 1)^4$
- b. $g(x) = (3x - 2)^3$
- c. $h(x) = x(x^2 + 3)^2$

5 Forme u'/u ★★★

Donne une primitive de chaque fonction sur l'intervalle indiqué.

- a. $f(x) = 2x/x^2+1$ sur $\mathbb{R}$
- b. $g(x) = 1/2x+3$ sur $] -3/2 ; +\infty[$
- c. $h(x) = 3x^2/x^3+1$ sur $] -1 ; +\infty[$

6 Exponentielles ★★★

Donne une primitive sur $\mathbb{R}$ de chaque fonction.

- a. $f(x) = e^{3x}$
- b. $g(x) = e^{-2x+1}$
- c. $h(x) = xe^{x^2}$

7 Cosinus et sinus ★★★

Donne une primitive sur $\mathbb{R}$ de chaque fonction.

- a. $f(x) = \cos(2x)$
- b. $g(x) = \sin(3x + 1)$
- c. $h(x) = \cos(x/2)$

8 Deux équations simples ★★★

Résous chaque problème.

- a. $y' = 3y$ avec $y(0) = 2$.
- b. $y' = -2y$ avec $y(1) = 5$.

9 Mettre sous la forme $y' = ay$ ★★★

Résous sur $\mathbb{R}$ chaque équation, sans condition initiale.

- a. $2y' = 10y$
- b. $y' + 5y = 0$
- c. $3y' - 2y = 0$

10 Équation avec second membre constant ★★★

Résous $y' = y + 3$ sur $\mathbb{R}$, puis donne la solution qui vérifie $y(0) = 0$.

11 Développer avant de primitiver ★★★

Détermine la primitive F de $f(x) = (x^2 - 1)^2$ sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.

12 Un trinôme sous le logarithme ★★★

Montre que $x^2 + 3x + 5 > 0$ pour tout réel x , puis donne une primitive de $f(x) = \frac{2x+3}{x^2+3x+5}$ sur $\mathbb{R}$.

13 Un produit sinus-cosinus ★★★

Trouve une primitive sur $\mathbb{R}$ de $f(x) = \sin(x)\cos^2(x)$. Indice : pose $u = \cos(x)$.

14 Quotient d'exponentielles ★★★

Donne une primitive sur $\mathbb{R}$ de $f(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$.

15 Une racine carrée ★★★

Donne une primitive sur $\mathbb{R}$ de $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

16 Logarithme au numérateur ★★★

Donne une primitive sur $]0 ; +\infty[$ de $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$. Indice : reconnais $u' u$ avec $u = \ln(x)$.

17 Équation avec condition initiale ★★★

Résous $y' = 2y - 6$ sur $\mathbb{R}$ avec $y(0) = 1$.

18 Écrire l'équation sous forme réduite ★★★

Résous $y' + 4y = 8$ sur $\mathbb{R}$, puis détermine la solution f telle que $f(0) = 5$. Que vaut la limite de $f(x)$ en $+\infty$?

19 $y' = f$ avec condition ★★★

Trouve la fonction y dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $y'(x) = 3x^2 - 2$ et $y(1) = 4$.

20 Un coefficient fractionnaire ★★★

Résous $y' = -3y + \frac{3}{2}$ sur $\mathbb{R}$, puis la solution telle que $y(0) = 0$.

21 Mouvement d'un mobile ★★★

Un mobile se déplace sur une droite. Son accélération est $a(t) = 6t - 2$ (en m/s^2 , t en secondes, $t \geq 0$). À l'instant 0, sa vitesse est 1 m/s et il est à l'origine (position 0 m). La vitesse est une primitive de l'accélération, la position est une primitive de la vitesse.

- Détermine la vitesse $v(t)$.
- Détermine la position $x(t)$.
- Quelles sont la vitesse et la position à $t = 3$ s ?

22 Un facteur qui disparaît à l'intérieur ★★★

Soit $f(x) = (2x + 1)e^{x^2+x}$. Détermine la primitive F de f sur $\mathbb{R}$ telle que $F(0) = 0$.

23 Linéariser un carré ★★★

Pour tout réel x , on admet que $\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$. En déduire une primitive de $f(x) = \cos^2(x)$ sur $\mathbb{R}$.

24 Équation avec solution particulière ★★★

On considère l'équation (E) : $y' = 2y + 4x$.

- Vérifie que la fonction $g(x) = -2x - 1$ est solution de (E).
- Résous l'équation $y' = 2y$.
- En déduire toutes les solutions de (E).
- Détermine la solution f de (E) telle que $f(0) = 3$.

25 Refroidissement d'un café ★★★

Un café à 90 °C est servi dans une salle à 20 °C. On note $T(t)$ sa température (en °C) au bout de t minutes. On admet que $T' = -k(T - 20)$ avec $k > 0$. Après 10 minutes, le café est à 60 °C. La calculatrice est autorisée.

- Détermine $T(t)$ en fonction de k .
- Calcule la valeur exacte de k , puis une valeur approchée à 10^{-3} près.
- Au bout de combien de temps le café est-il à 30 °C, température idéale pour certains ? Arrondis à la minute.

26 Décroissance radioactive ★★★

Un échantillon contient 800 g d'un isotope dont la demi-vie est de 5 ans. La masse $N(t)$ (en g, t en années) vérifie $N' = -\lambda N$ avec $\lambda > 0$. La calculatrice est autorisée.

- Exprime λ avec la demi-vie, puis donne $N(t)$.
- Quelle masse reste-t-il au bout de 12 ans ? Arrondis à 0,1 g.
- Au bout de combien d'années reste-t-il 10 % de la masse initiale ? Arrondis à 0,1 an.

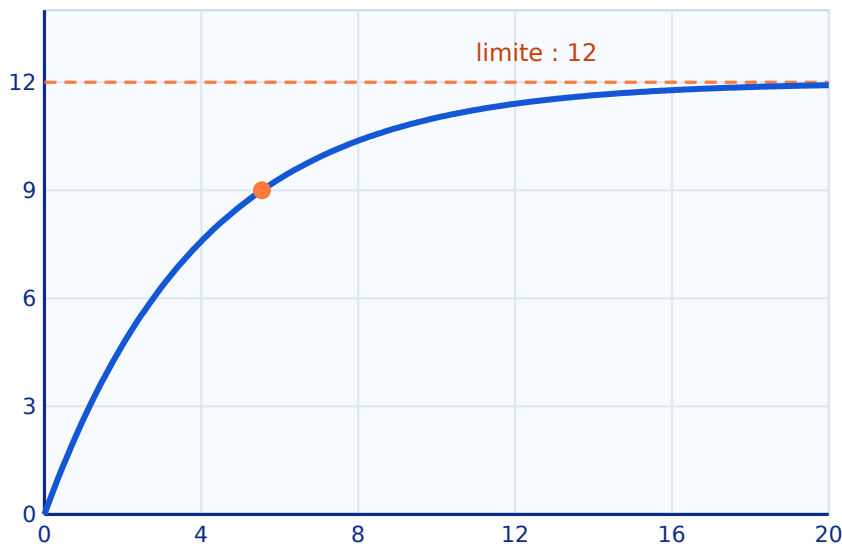
27 Concentration d'un médicament ★★★

Un médicament est perfusé à débit constant. La concentration $C(t)$ (en mg/L) dans le sang, t en heures, vérifie $C' = -0,25C + 3$ avec $C(0) = 0$. La calculatrice est autorisée.

- Détermine $C(t)$.
- Quelle est la limite de $C(t)$ quand t tend vers $+\infty$? Interprète.
- Au bout de combien de temps la concentration atteint-elle 9 mg/L ?

28 Les primitives d'une fonction et leur graphique ★★★

La courbe ci-dessous représente la fonction $F(x) = 12(1 - e^{-x/4})$ pour $x \geq 0$.



- Calcule $F'(x)$ et montre que F est solution de l'équation différentielle $y' = -0,25y + 3$.
- Justifie que F est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.
- Quelle est la signification géométrique de la droite pointillée $y = 12$?