

Probabilités conditionnelles et indépendance

Corrigé des exercices - 1ère

Corrigé détaillé des exercices du chapitre. Vérifie tes réponses étape par étape et corrige-toi.

1 Lecture d'un tableau croisé ★★★

a. Demi-pensionnaires : $90 + 50 = 140$; externes : 30 filles, 30 garçons, soit 60 externes. Total : 200.

	D	Externes	Total
Filles	90	30	120
Garçons	50	30	80
Total	140	60	200

b. $P(F) = 120/200 = 3/5$; $P(D) = 140/200 = 7/10$; $P(F \cap D) = 90/200 = 9/20$.

c. $P_F(D) = 90/120 = 3/4$; $P_D(F) = 90/140 = 9/14$.

d. Parmi les demi-pensionnaires, **9/14** (environ 64 %) sont des filles.

2 Calcul de $P_A(B)$ à partir des probabilités ★★★

a. $P_A(B) = 0,2/0,5 = 0,4$; $P_B(A) = 0,2/0,4 = 0,5$.

b. $P(A) \times P(B) = 0,5 \times 0,4 = 0,2 = P(A \cap B)$. Les événements sont indépendants. On retrouve que $P_A(B) = P(B)$ et $P_B(A) = P(A)$.

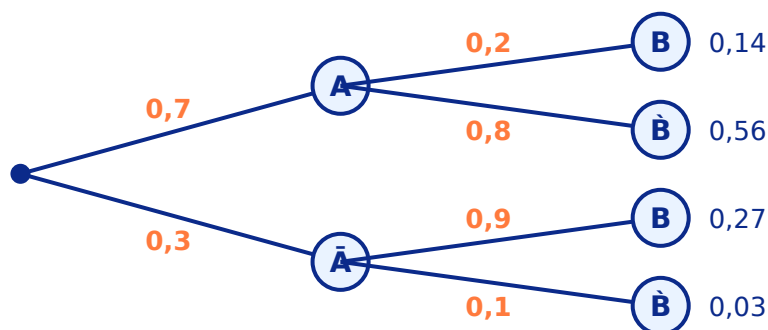
3 Probabilité d'une intersection ★★★

a. $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = 0,6 \times 0,3 = 0,18$. Comme $P(\bar{A}) = 1 - 0,6 = 0,4$: $P(\bar{A} \cap B) = 0,4 \times 0,5 = 0,20$.

b. A et $\bar{A}$ forment une partition de l'univers : $P(B) = 0,18 + 0,20 = 0,38$.

4 Compléter un arbre ★★★

a. $P(\bar{A}) = 0,3$; $P_A(\bar{B}) = 0,8$; $P_{\bar{A}}(\bar{B}) = 0,1$.



b. $0,7 \times 0,2 = 0,14$; $0,7 \times 0,8 = 0,56$; $0,3 \times 0,9 = 0,27$; $0,3 \times 0,1 = 0,03$. Somme : $0,14 + 0,56 + 0,27 + 0,03 = 1$.

c. $P(B) = 0,14 + 0,27 = 0,41$.

5 Dé et indépendance ★★★

a. $A = \{2 ; 4 ; 6\}$ donc $P(A) = \mathbf{1/2}$. $B = \{4 ; 5 ; 6\}$ donc $P(B) = \mathbf{1/2}$. $A \cap B = \{4 ; 6\}$ donc $P(A \cap B) = \mathbf{2/6 = 1/3}$.

b. $P_A(B) = (1/3) \div (1/2) = \mathbf{2/3}$.

c. $P(A) \times P(B) = \mathbf{1/4 \neq 1/3}$. Les événements ne sont pas indépendants (on le voit aussi car $P_A(B) = \mathbf{2/3 \neq P(B)}$).

6 Vrai ou faux ? ★★★

a. Faux. $P_A(B) = P(A \cap B) \div P(A)$ et $P_B(A) = P(A \cap B) \div P(B)$: elles sont égales seulement si $P(A) = P(B)$ (ou si $P(A \cap B) = 0$). Contre-exemple de l'exercice 1 : $\mathbf{3/4 \neq 9/14}$.

b. Vrai. $A \cap B$ est inclus dans A .

c. Faux. Si A et B sont incompatibles, $P(A \cap B) = 0$ alors que $P(A) \times P(B) \neq 0$.

d. Vrai, propriété du cours : $A \cap B$ et $A \cap \bar{B}$ partagent A .

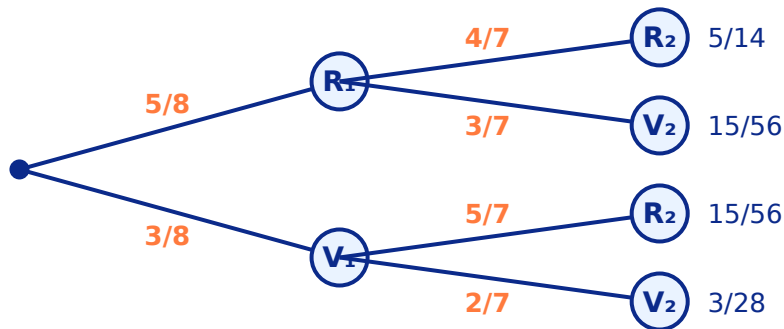
7 Un jeu de cartes ★★★

a. $P(R) = \mathbf{4/32 = 1/8}$; $P(C) = \mathbf{8/32 = 1/4}$; $P(R \cap C) = \mathbf{1/32}$ (un seul roi de cœur).

b. $\mathbf{1/8 \times 1/4 = 1/32 = P(R \cap C)}$: indépendants.

c. $P_C(R) = (1/32) \div (1/4) = \mathbf{1/8} = P(R)$: savoir que la carte est un cœur ne change pas la chance que ce soit un roi.

8 Tirage sans remise ★★★

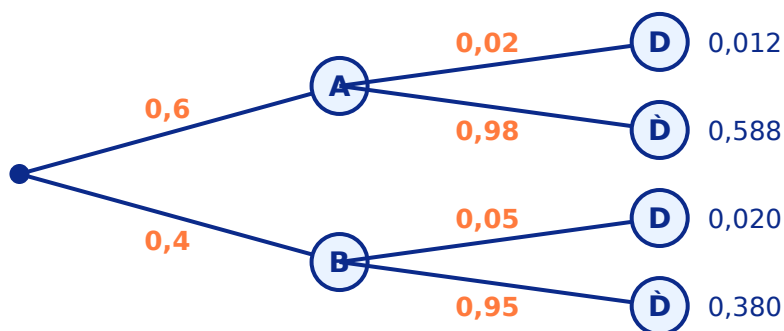


a. Après une rouge, il reste 4 rouges et 3 vertes : $P_{R_1}(R_2) = \mathbf{4/7}$. Après une verte, il reste 5 rouges et 2 vertes : $P_{V_1}(R_2) = \mathbf{5/7}$.

b. $P(R_1 \cap R_2) = \mathbf{5/8} \times \mathbf{4/7} = \mathbf{20/56} = \mathbf{5/14}$. $P(V_1 \cap V_2) = \mathbf{3/8} \times \mathbf{2/7} = \mathbf{6/56} = \mathbf{3/28}$.

c. Deux couleurs différentes : on passe par le contraire. $1 - \mathbf{5/14} - \mathbf{3/28} = \mathbf{28/28} - \mathbf{10/28} - \mathbf{3/28} = \mathbf{15/28}$. Vérification par les deux chemins : $\mathbf{15/56} + \mathbf{15/56} = \mathbf{30/56} = \mathbf{15/28}$.

9 Deux machines ★★★



b. D'après la formule des probabilités totales : $P(D) = 0,6 \times 0,02 + 0,4 \times 0,05 = 0,012 + 0,020 = 0,032$.

c. $P_D(B) = \mathbf{0,020/0,032} = \mathbf{5/8} = 0,625$. Bien que B produise moins de pièces, elle fournit 62,5 % des pièces défectueuses.

10 Sondage et lecture ★★★

a. Femmes lectrices : $0,4 \times 300 = 120$; non lectrices : 180. Hommes : 200, dont 110

lecteurs et 90 non lecteurs. Total des lecteurs : 230.

	L	Ì	Total
Femmes	120	180	300
Hommes	110	90	200
Total	230	270	500

b. $P(L) = 230/500 = 23/50$.

c. $P_L(F) = 120/230 = 12/23$.

d. $P_F(L) = 0,4$ et $P(L) = 0,46$: différents, donc F et L ne sont pas indépendants.

11 Construire des événements indépendants ★★★

$P(A \cap B) = 0,3 \times 0,5 = 0,15$. $P(A \cup B) = 0,3 + 0,5 - 0,15 = 0,65$. $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A \cup B) = 0,35$, ou encore $P(\bar{A}) \times P(\bar{B}) = 0,7 \times 0,5 = 0,35$: les deux calculs concordent, ce qui illustre que $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont indépendants.

12 Trouver une probabilité inconnue ★★★

Posons $p = P(B)$. Par indépendance, $P(A \cap B) = 0,4 p$. Donc $P(A \cup B) = 0,4 + p - 0,4 p = 0,4 + 0,6 p = 0,7$, d'où $0,6 p = 0,3$ et $p = 0,5$. Vérification : $0,4 + 0,5 - 0,2 = 0,7$.

13 Deux lancers francs ★★★

a. $0,7 \times 0,7 = 0,49$.

b. Deux chemins : réussi puis raté, ou raté puis réussi : $2 \times 0,7 \times 0,3 = 0,42$.

c. Contraire de « aucune réussite » : $1 - 0,3 \times 0,3 = 1 - 0,09 = 0,91$. Contrôle : $0,49 + 0,42 = 0,91$.

14 Une pièce truquée ★★★

a. Contraire : trois faces, de probabilité $0,4^3 = 0,064$. Donc $1 - 0,064 = 0,936$.

b. Il y a trois chemins (PPF, PFP, FPP), chacun de probabilité $0,6^2 \times 0,4 = 0,144$. Donc $3 \times 0,144 = 0,432$.

15 Trois moyens de transport ★★★

a. Bus, vélo, pied forment une partition. $P(R) = 0,5 \times 0,10 + 0,3 \times 0,04 + 0,2 \times 0,05 = 0,050 + 0,012 + 0,010 = 0,072$.

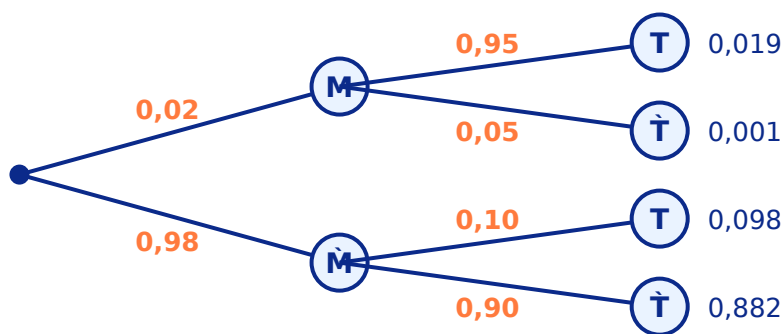
b. $P_R(\text{bus}) = 0,050/0,072 = 25/36 \approx 0,694$.

16 Deux urnes ★★★

a. $P(R) = 1/2 \times 3/5 + 1/2 \times 1/5 = 3/10 + 1/10 = 4/10 = 2/5$.

b. $P_R(U_1) = (3/10) \div (2/5) = 3/4$.

17 Un test de dépistage ★★★



b. $P(T) = 0,02 \times 0,95 + 0,98 \times 0,10 = 0,019 + 0,098 = 0,117$.

c. $P_T(M) = 0,019/0,117 = 19/117 \approx 0,162$. Moins de 17 % des tests positifs correspondent à un malade : la maladie étant rare, la plupart des positifs sont de faux positifs. Un test positif doit être confirmé.

18 Un jeu de questions ★★★

a. $P(J) = 0,5 \times 0,9 + 0,3 \times 0,6 + 0,2 \times 0,3 = 0,45 + 0,18 + 0,06 = 0,69$.

b. $P_J(\text{facile}) = 0,45/0,69 = 15/23 \approx 0,652$.

c. $P(J) = 1 - 0,69 = 0,31$. $P(\text{difficile} \cap J) = 0,2 \times 0,7 = 0,14$. Donc $P_J(\text{difficile}) = 0,14/0,31 = 14/31 \approx 0,452$.

19 Paramètre à retrouver ★★★

Posons $x = P_A(B)$. Formule des probabilités totales : $P(B) = P(A) \times x + P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(B) = 0,5x + 0,5 \times 0,2 = 0,5x + 0,1$. Donc $0,5x + 0,1 = 0,35$, soit $x = 0,5$.

Comme $P_A(B) = 0,5 \neq P(B) = 0,35$, A et B ne sont pas indépendants.

20 Familles de deux enfants ★★★

Les quatre issues FF, FG, GF, GG ont chacune la probabilité **1/4**.

a. $P(FF) = \mathbf{1/4}$.

b. « Au moins une fille » = {FF, FG, GF}, de probabilité **3/4**. $P = (1/4) \div (3/4) = \mathbf{1/3}$.

c. « L'aînée est une fille » = {FF, FG}, de probabilité **1/2**. $P = (1/4) \div (1/2) = \mathbf{1/2}$.

Les deux informations « au moins une fille » et « l'aînée est une fille » ne se valent pas : l'information précise ne réduit pas l'univers de la même façon.

21 Combien de lancers ? ★★★

Les lancers sont indépendants. La probabilité de n'obtenir aucun 6 en n lancers est $(5/6)^n$. On cherche $1 - (5/6)^n > 0,99$, c'est-à-dire $(5/6)^n < 0,01$.

À la calculatrice : $(5/6)^{25} \approx 0,0105 > 0,01$; $(5/6)^{26} \approx 0,0087 < 0,01$. La suite $(5/6)^n$ étant décroissante, le plus petit entier est **n = 26**.

22 Démonstration : indépendance et contraire ★★★

Par la loi du contraire (loi de De Morgan), $\bar{A} \cap \bar{B}$ est le contraire de $A \cup B$. Donc $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$. Par indépendance, $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$, donc $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A) - P(B) + P(A) \times P(B) = (1 - P(A)) \times (1 - P(B)) = P(\bar{A}) \times P(\bar{B})$. $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont indépendants.

23 Deux machines, retour ★★★

$P(M_1 \cap D) = 0,45 \times 0,04 = 0,018$. $P(M_2 \cap D) = 0,55 \times 0,06 = 0,033$. $P(D) = 0,018 + 0,033 = 0,051$. $P_D(M_1) = \mathbf{0,018/0,051 = 6/17} \approx 0,353$.

24 Tableau d'indépendance ★★★

a. $P(S \cap C) = 0,35 \times 0,6 = 0,21$; effectif = $0,21 \times 200 = 42$.

b. S : $0,35 \times 200 = 70$; C : 120. Donc S et non C : $70 - 42 = 28$; non S et C : $120 - 42 = 78$; non S non C : $200 - 70 - 78 = 52$.

	C	C̄	Total
S	42	28	70
Š	78	52	130
Total	120	80	200

Contrôle : $130 \times 80 \div 200 = 52$.