

# Probabilités conditionnelles et indépendance

## Corrigé des exercices - Terminale

Corrigé détaillé des exercices du chapitre. Vérifie tes réponses étape par étape et corrige-toi.

### 1 Un dé à six faces ★★★

- $A = \{2 ; 4 ; 6\}$ ,  $B = \{3 ; 6\}$  et  $A \cap B = \{6\}$ . Donc  $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ ,  $P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ ,  $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$ .
- $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3}$ .  $P_B(A) = \frac{1/6}{1/3} = \frac{1}{2}$ .
- Les deux probabilités ont le même numérateur  $P(A \cap B)$ , mais pas le même dénominateur : on ne se restreint pas au même univers (3 issues pour A, 2 pour B).

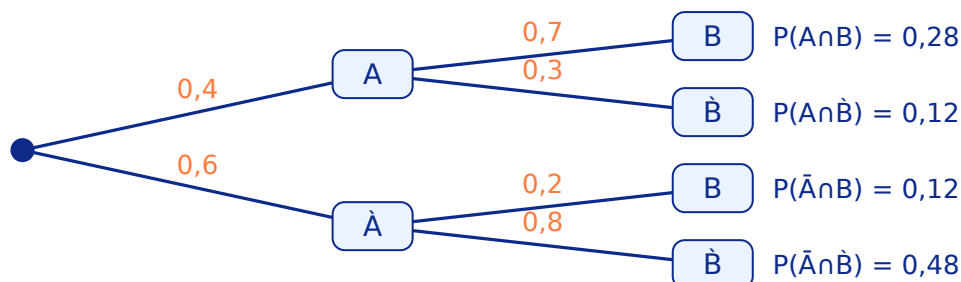
### 2 Lecture d'un tableau d'effectifs ★★★

Effectifs : 60 jeunes (36 + 24), 66 nageurs (36 + 30), 150 adhérents.

- $P(J) = \frac{60}{150} = \frac{2}{5} = 0,4$ .
- $P(N \cap J) = \frac{36}{150} = \frac{6}{25} = 0,24$ .
- $P_J(N) = \frac{36}{60} = \frac{3}{5} = 0,6$  (parmi les 60 jeunes, 36 font de la natation).
- $P_N(J) = \frac{36}{66} = \frac{6}{11} \approx 0,545$  (parmi les 66 nageurs, 36 sont jeunes).

### 3 Compléter un arbre ★★★

- On a  $P(\bar{A}) = 1 - 0,4 = 0,6$  ;  $P_A(\bar{B}) = 1 - 0,7 = 0,3$  ;  $P_{\bar{A}}(\bar{B}) = 1 - 0,2 = 0,8$ .



- $P(A \cap B) = 0,4 \times 0,7 = 0,28$  ;  $P(\bar{A} \cap B) = 0,6 \times 0,2 = 0,12$  ;  $(A ; \bar{A})$  est une partition donc  $P(B) = 0,28 + 0,12 = \mathbf{0,4}$ .

#### 4 Vrai ou faux ? ★★★

- a. **Faux.**  $P_A(B) = P(A \cap B)/P(A)$  et  $P_B(A) = P(A \cap B)/P(B)$  : égaux seulement si  $P(A) = P(B)$ . Contre-exemple de l'exercice 1 :  $1/3 \neq 1/2$ .
- b. **Vrai.** Les deux branches issues de A dans l'arbre ont pour somme 1.
- c. **Faux.** Les deux probabilités sont portées par des branches qui partent de nœuds différents (A et  $\bar{A}$ ) : leur somme n'a aucune raison de valoir 1. Dans l'exercice 3 :  $0,7 + 0,2 = 0,9$ .
- d. **Vrai.**  $P_A(B) = 0,12/0,3 = 0,4$ .

#### 5 Deux tirages sans remise ★★★

- a.  $P(R_1) = 5/8$ . Si  $R_1$  est réalisé, il reste 4 rouges sur 7 boules :  $P_{R_1}(R_2) = 4/7$ . Si  $\bar{R}_1$  est réalisé, il reste 5 rouges sur 7 :  $P_{\bar{R}_1}(R_2) = 5/7$ .
- b.  $(R_1 ; \bar{R}_1)$  est une partition :  $P(R_2) = 5/8 \times 4/7 + 3/8 \times 5/7 = 20/56 + 15/56 = 35/56 = 5/8$ . On retrouve  $P(R_1)$  : c'est normal, la 2e boule tirée a la même loi que la 1re.

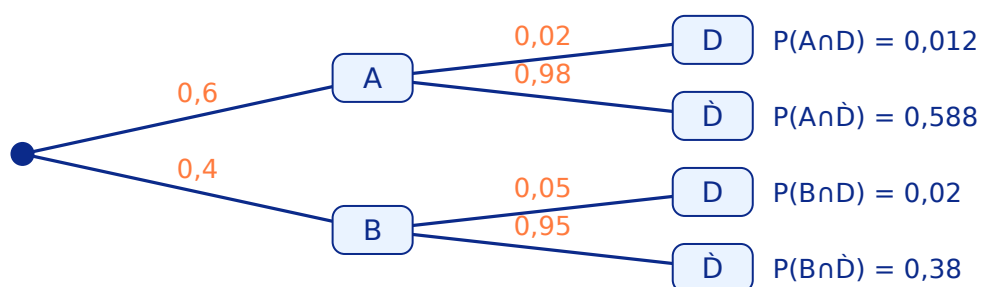
#### 6 Indépendants ou pas ? ★★★

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ , donc  $P(A \cap B) = 0,5 + 0,4 - 0,7 = 0,2$ . Par ailleurs  $P(A) \times P(B) = 0,5 \times 0,4 = 0,2$ . Comme  $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ , A et B sont **indépendants**.

#### 7 Reconnaître une partition ★★★

- a. **Oui** : trois parties non vides, disjointes, dont la réunion est  $\{1 ; \dots ; 6\}$ .
- b. **Non** : le résultat 3 appartient aux deux premiers événements, qui ne sont donc pas incompatibles.
- c. **Non** : les résultats 5 et 6 ne sont dans aucun événement, la réunion n'est pas l'univers.
- d. **Oui** : les nombres premiers sont  $\{2 ; 3 ; 5\}$ , les carrés parfaits  $\{1 ; 4\}$  et « autre »  $= \{6\}$ . Ils sont disjoints et leur réunion est l'univers ( $3 + 2 + 1 = 6$  issues).

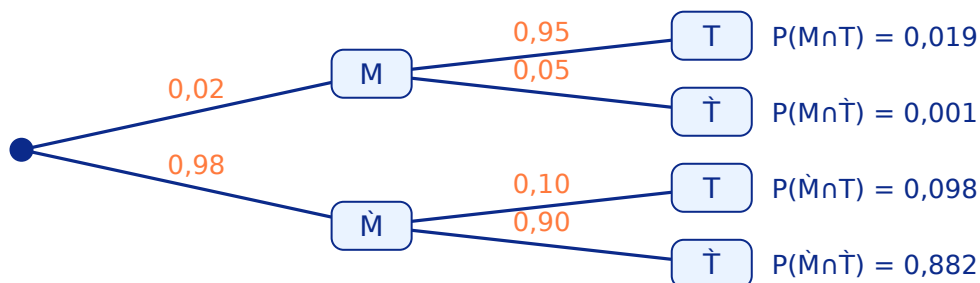
#### 8 Deux machines ★★★



a.

- b. (A ; B) est une partition :  $P(D) = 0,6 \times 0,02 + 0,4 \times 0,05 = 0,012 + 0,02 = \mathbf{0,032}$ .
- c.  $P_D(A) = \mathbf{P(A \cap D)/P(D) = 0,012/0,032 = 3/8 = 0,375}$ . Bien que A fabrique 60 % des vis, elle ne fournit que 37,5 % des vis défectueuses.

## 9 Un test de dépistage ★★★



- a.
- b.  $P(T) = 0,02 \times 0,95 + 0,98 \times 0,10 = 0,019 + 0,098 = \mathbf{0,117}$ .
- c.  $P_T(M) = \mathbf{0,019/0,117 = 19/117 \approx 0,162}$ . Malgré un test positif, il n'y a qu'environ 16 % de chances d'être malade, car la maladie est rare : la plupart des tests positifs sont des faux positifs.

## 10 Trois urnes ★★★

- a. Chaque résultat du dé désigne une seule urne, et tous les résultats sont couverts : partition.  $P(U_1) = \mathbf{3/6 = 1/2}$ ,  $P(U_2) = \mathbf{2/6 = 1/3}$ ,  $P(U_3) = \mathbf{1/6}$ .
- b.  $P(R) = \mathbf{1/2 \times 1/4 + 1/3 \times 1/2 + 1/6 \times 3/4 = 1/8 + 1/6 + 1/8 = 3/24 + 4/24 + 3/24 = 10/24 = 5/12}$ .
- c. On cherche  $P_R(U_3) = \mathbf{P(U_3 \cap R)/P(R)}$ . Or  $P(U_3 \cap R) = \mathbf{1/6 \times 3/4 = 1/8}$ , donc  $P_R(U_3) = \mathbf{1/8 \div 5/12 = 12/40 = 3/10}$ .

## 11 Orientation et indépendance ★★★

- a.  $P(F) = \mathbf{120/200 = 0,6}$  ;  $P(E) = \mathbf{120/200 = 0,6}$  ;  $P(F \cap E) = \mathbf{72/200 = 0,36 = 0,6 \times 0,6}$ . Les événements sont **indépendants** : la proportion de fille est la même chez les élèves d'espagnol que dans l'ensemble.
- b.  $P(F) = \mathbf{120/200 = 0,6}$  ;  $P(E) = \mathbf{110/200 = 0,55}$  ;  $P(F \cap E) = \mathbf{80/200 = 0,4}$ . Or  $0,6 \times 0,55 = 0,33 \neq 0,4$  : **pas indépendants**. On a  $P_F(E) = \mathbf{80/120 = 2/3 \approx 0,667}$  alors que  $P(E) = 0,55$  : être une fille augmente la probabilité de choisir l'espagnol.

## 12 Calculs avec deux événements indépendants ★★★

- $P(A \cap B) = 0,3 \times 0,5 = 0,15$ .
- $P(A \cup B) = 0,3 + 0,5 - 0,15 = 0,65$ .
- $\bar{A}$  et  $\bar{B}$  sont indépendants :  $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,7 \times 0,5 = 0,35$ .
- $\bar{A}$  et  $B$  sont indépendants :  $P(\bar{A} \cap B) = 0,7 \times 0,5 = 0,35$ .

Remarque :  $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0,65 = 0,35$  (loi de De Morgan) : les deux méthodes concordent.

### 13 Trois lancers d'une pièce ★★★

- a.  $P = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} = 0,125$ .
- b. Contraire : aucun « pile », donc trois « face » :  $\frac{1}{8}$ .  $P = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8} = 0,875$ .
- c. Les chemins avec deux « pile » et un « face » sont PPF, PFP, FPP : 3 chemins de probabilité  $\frac{1}{8}$  chacun.  $P = \frac{3}{8} = 0,375$ .

### 14 Un archer ★★★

- a.  $0,8^4 = 0,4096$ .
- b.  $0,2^4 = 0,0016$ .
- c. Contraire de « aucune touche » :  $1 - 0,0016 = \mathbf{0,9984}$ .
- d. Quatre chemins (la touche peut être au 1er, 2e, 3e ou 4e tir), chacun de probabilité  $0,8 \times 0,2^3 = 0,0064$  :  $P = 4 \times 0,0064 = \mathbf{0,0256}$ .

### 15 Combien de lancers ? ★★★

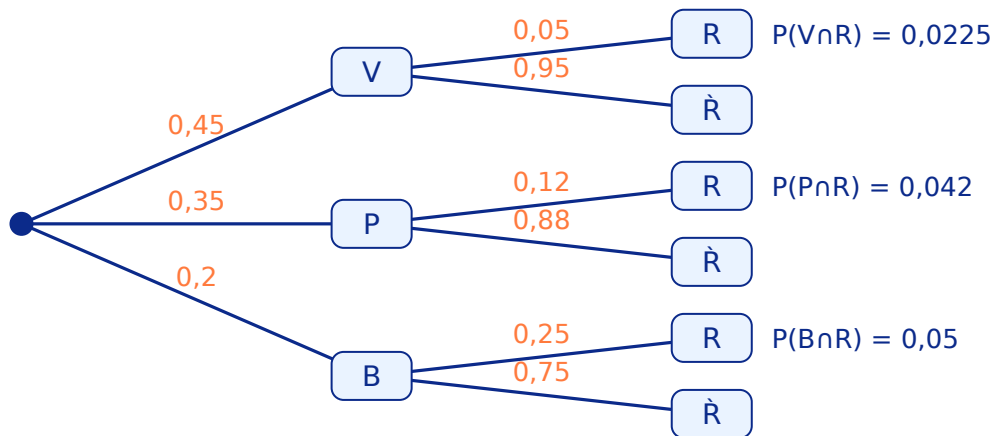
Sur  $n$  lancers indépendants,  $P(\text{au moins un } 6) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$ . On veut  $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n \geq 0,95$ , soit  $\left(\frac{5}{6}\right)^n \leq 0,05$ .

Avec la calculatrice :  $\left(\frac{5}{6}\right)^{16} \approx 0,0541$  (trop grand) et  $\left(\frac{5}{6}\right)^{17} \approx 0,0451 \leq 0,05$ . La suite  $\left(\frac{5}{6}\right)^n$  étant décroissante, il faut **17 lancers** au minimum.

### 16 Somme de deux variables indépendantes ★★★

- a. Indépendance :  $P(X = 2 \text{ et } Y = 3) = 0,2 \times 0,6 = 0,12$ .
- b.  $E(X) = 0 \times 0,5 + 1 \times 0,3 + 2 \times 0,2 = 0,7$  ;  $V(X) = 0,5 \times 0,7^2 + 0,3 \times 0,3^2 + 0,2 \times 1,3^2 = 0,245 + 0,027 + 0,338 = 0,61$ .  $E(Y) = 0,4 + 1,8 = 2,2$  ;  $V(Y) = 0,4 \times 1,2^2 + 0,6 \times 0,8^2 = 0,576 + 0,384 = 0,96$ .
- c.  $E(X + Y) = 0,7 + 2,2 = 2,9$  ; comme  $X$  et  $Y$  sont indépendantes,  $V(X + Y) = 0,61 + 0,96 = 1,57$ .
- d. Valeurs possibles : 1, 2, 3, 4, 5.  $P(X + Y = 1) = 0,5 \times 0,4 = 0,2$  ;  $P(X + Y = 2) = 0,3 \times 0,4 = 0,12$  ;  $P(X + Y = 3) = 0,5 \times 0,6 + 0,2 \times 0,4 = 0,38$  ;  $P(X + Y = 4) = 0,3 \times 0,6 = 0,18$  ;  $P(X + Y = 5) = 0,2 \times 0,6 = 0,12$ . Total : 1.  $E(X + Y) = 0,2 + 0,24 + 1,14 + 0,72 + 0,6 = 2,9$ . ✓.

### 17 Le trajet du matin ★★★



- 
- (V ; P ; B) est une partition :  $P(R) = 0,0225 + 0,042 + 0,05 = \mathbf{0,1145}$ .
- $P_R(B) = \mathbf{0,05/0,1145} = \mathbf{100/229} \approx \mathbf{0,437}$  ;  $P_R(V) = \mathbf{0,0225/0,1145} = \mathbf{45/229} \approx \mathbf{0,197}$ .
- Le bus ne représente que 20 % des jours mais environ 44 % des retards ; la marche en représente  $\mathbf{84/229} \approx 0,367$  et le vélo environ 20 %. C'est donc sur le **bus** qu'il faut agir en priorité (un jour de bus sur quatre est un jour de retard).

## 18 Deux contrôles successifs ★★★

- Les contrôles sont indépendants :  $P(\text{aucune détection sachant } D) = (1 - 0,9) \times (1 - 0,8) = 0,1 \times 0,2 = 0,02$ .
- $P(D \cap S) = 0,06 \times 0,02 = 0,0012$ . Les pièces sans défaut sont toutes acceptées :  $P(\bar{D} \cap S) = 0,94$ . Donc  $P(S) = 0,94 + 0,0012 = \mathbf{0,9412}$ .
- $P_S(D) = \mathbf{0,0012/0,9412} \approx \mathbf{0,0013}$ , soit environ 0,13 % : le double contrôle rend les pièces acceptées très fiables.

## 19 Trouver une probabilité inconnue ★★★

Posons  $b = P(B)$ . Par indépendance,  $P(A \cap B) = 0,4$  b. Alors  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,4 + b - 0,4 b = 0,4 + 0,6 b$ .

$0,4 + 0,6 b = 0,76 \Leftrightarrow 0,6 b = 0,36 \Leftrightarrow \mathbf{b = 0,6}$ . Alors  $P(A \cap B) = 0,4 \times 0,6 = \mathbf{0,24}$ , et par indépendance  $P_A(B) = P(B) = \mathbf{0,6}$  (vérification :  $\mathbf{0,24/0,4} = 0,6$ ).

## 20 Démontre l'indépendance du contraire ★★★

**$\bar{A}$  et B.** B est la réunion disjointe de  $A \cap B$  et  $\bar{A} \cap B$ , donc  $P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = P(B) - P(A)P(B) = P(B)(1 - P(A)) = P(\bar{A}) \times P(B)$ .

**$\bar{A}$  et  $\bar{B}$ .** On applique le résultat précédent au couple  $(B ; \bar{A})$ , formé d'événements indépendants (on vient de le voir) : il donne l'indépendance de  $\bar{B}$  et  $\bar{A}$ . Variante :  $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - P(A) - P(B) + P(A)P(B) = (1 - P(A))(1 - P(B)) = P(\bar{A}) \times P(\bar{B})$ .

## 21 Les deux enfants ★★★

On liste les issues équiprobables (aîné, cadet) : FF, FG, GF, GG, chacune de probabilité  $\frac{1}{4}$ .

- Événement « l'aîné est une fille » : FF, FG, de probabilité  $\frac{2}{4}$ . Parmi eux, FF seul convient : probabilité  $\frac{1}{4} \div \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ .
- Événement « au moins une fille » : FF, FG, GF, de probabilité  $\frac{3}{4}$ . La probabilité demandée est  $\frac{1}{4} \div \frac{3}{4} = \frac{1}{3}$ .

L'information n'est pas la même : « l'aîné est une fille » élimine GF et GG, alors que « au moins une fille » n'élimine que GG. Des informations différentes donnent des probabilités conditionnelles différentes.

## 22 Trois portes ★★★

- Chaque porte a la même probabilité de cacher la voiture :  $P(G) = \frac{1}{3}$  et  $P(\bar{G}) = \frac{2}{3}$ .
- Garder : on gagne exactement quand G est réalisé : probabilité  $\frac{1}{3}$ . Changer : si G est réalisé, l'autre porte non ouverte cache une chèvre (on perd) ; si  $\bar{G}$  est réalisé, le présentateur a ouvert l'unique autre chèvre et la porte restante cache la voiture (on gagne). Probabilité de gagner en changeant =  $P(\bar{G}) = \frac{2}{3}$ .
- Il faut **changer de porte** : la probabilité de gagner double. L'ouverture de la porte ne modifie pas la probabilité de ton premier choix, qui reste  $\frac{1}{3}$  ; toute l'information est reportée sur la dernière porte.

## 23 Un match en deux sets gagnants ★★★

- On note « a » un set gagné par Léa et « t » un set gagné par Tom. Léa gagne le match avec aa, ata, taa ; Tom le gagne avec tt, tat, att.
- $P(aa) = 0,6^2 = 0,36$  ;  $P(ata) = P(taa) = 0,6 \times 0,4 \times 0,6 = 0,144$ . Donc  $P(L) = 0,36 + 0,144 + 0,144 = \mathbf{0,648}$ .
- Le match dure trois sets quand les deux premiers sets sont partagés :  $P(T) = 2 \times 0,6 \times 0,4 = \mathbf{0,48}$ .
- $P(LnT) = 0,144 + 0,144 = 0,288$  donc  $P_L(T) = \mathbf{0,288/0,648 = 4/9 \approx 0,444}$ .

## 24 Fiabilité d'un système ★★★

- Indépendance :  $0,9 \times 0,8 = \mathbf{0,72}$ .
- Contraire : les deux sont en panne, probabilité  $0,1 \times 0,2 = 0,02$ . Donc  $1 - 0,02 = \mathbf{0,98}$ .
- Bloc parallèle :  $1 - 0,3 \times 0,3 = 1 - 0,09 = 0,91$ . Système :  $0,9 \times 0,91 = \mathbf{0,819}$ . Le bloc est indépendant du composant 1 : la probabilité conditionnelle est égale à  $P(\text{bloc}) = \mathbf{0,91}$ .