

# Probabilités conditionnelles et indépendance

## Cours de maths - 1ère

Quand on apprend une information, la probabilité d'un événement peut changer : savoir qu'il pleut modifie la chance que tu prennes le bus. Ce chapitre apprend à calculer ces probabilités « sachant que », à les organiser dans des arbres pondérés et des tableaux, à décider si deux événements sont indépendants, et à remonter le temps : de la conséquence vers la cause.

## 1. Rappels sur les probabilités

Une expérience aléatoire a un ensemble de résultats possibles appelé **univers**, noté  $\Omega$ . Un **événement** est une partie de  $\Omega$ . On rappelle :

- $0 \leq P(A) \leq 1$ ,  $P(\Omega) = 1$  et  $P(\emptyset) = 0$  ;
- l'événement contraire de A, noté  $\bar{A}$ , vérifie  $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$  ;
- «  $A \cap B$  » se lit « A et B » (les deux se réalisent), «  $A \cup B$  » se lit « A ou B » (l'un au moins se réalise) ;
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ . Si A et B sont **incompatibles** ( $A \cap B = \emptyset$ ), alors  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ .

### Exemple

On lance un dé équilibré à six faces. Soit A : « le résultat est pair » et B : « le résultat est au moins 5 ». Alors  $P(A) = \frac{1}{2}$ ,  $P(B) = \frac{1}{3}$  et  $A \cap B = \{6\}$ , donc  $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$ . On en déduit  $P(A \cup B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$  (les faces 2, 4, 5, 6 : quatre faces sur six).

|        |           |   |
|--------|-----------|---|
| A      |           |   |
| A ∩ B  | B seul    | B |
| A seul | ni A ni B |   |

## 2. Probabilité conditionnelle

### Définition

Fiche en ligne : [maths-facile.eu/probabilites-conditionnelles-et-independance-cours-1ere/](https://maths-facile.eu/probabilites-conditionnelles-et-independance-cours-1ere/) · Cours, exercices et contrôles corrigés sur [maths-facile.eu](https://maths-facile.eu) · page 1/8

Soit A un événement de probabilité non nulle. La **probabilité de B sachant A** est le nombre  $P_A(B) = P(A \cap B) \div P(A)$ .

Cette probabilité mesure la chance que B se réalise *quand on sait déjà que A est réalisé* : l'univers « se réduit » à A. On l'écrit aussi  $P(B | A)$  dans certains ouvrages ; nous utilisons la notation  $P_A(B)$ .

### Propriété (probabilité d'une intersection)

Si  $P(A) \neq 0$ , alors  $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$ .

Par symétrie, si  $P(B) \neq 0$  :  $P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A)$ .

**Démonstration.** C'est la définition multipliée par  $P(A)$  des deux côtés.

### Propriété (contraire)

$$P_A(B) + P_A(\bar{B}) = 1.$$

**Démonstration.** Les événements  $A \cap B$  et  $A \cap \bar{B}$  sont incompatibles et leur réunion est A. Donc  $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})$ . En divisant par  $P(A)$  :  $1 = P_A(B) + P_A(\bar{B})$ .

### Exemple résolu

Dans une classe, 60 % des élèves aiment les échecs (événement E) et 24 % aiment à la fois les échecs et le jeu de go (événement G). On choisit un élève au hasard. Sachant qu'il aime les échecs, la probabilité qu'il aime aussi le go est  $P_E(G) = \mathbf{0,24/0,60} = 0,4$ .

### Piège : ne pas inverser

$P_A(B)$  et  $P_B(A)$  sont en général **différentes**. La probabilité d'être un joueur de basket sachant qu'on mesure plus de 2 m est élevée ; la probabilité de mesurer plus de 2 m sachant qu'on joue au basket est bien plus faible. Les dénominateurs ne sont pas les mêmes :  $P(A)$  d'un côté,  $P(B)$  de l'autre.

## 3. Tableaux croisés d'effectifs

Un **tableau croisé** classe une population selon deux critères. Les probabilités conditionnelles se lisent en changeant la population de référence : on divise par le total de la **ligne** ou de la **colonne** concernée.

|  | Aime la lecture (L) | N'aime pas (L̄) | Total |
|--|---------------------|-----------------|-------|
|--|---------------------|-----------------|-------|

|             | Aime la lecture (L) | N'aime pas (L̄) | Total |
|-------------|---------------------|-----------------|-------|
| Filles (F)  | 42                  | 18              | 60    |
| Garçons (G) | 28                  | 32              | 60    |
| Total       | 70                  | 50              | 120   |

On choisit un élève au hasard parmi ces 120 élèves.

- $P(L) = 70/120 = 7/12$  (on divise par le total général) ;
- $P(F \cap L) = 42/120 = 7/20$  (la case « filles et lecture ») ;
- $P_F(L) = 42/60 = 7/10$  (on se limite à la ligne des filles) ;
- $P_L(F) = 42/70 = 3/5$  (on se limite à la colonne « aime la lecture »).

### Méthode : lire $P_A(B)$ dans un tableau

1. Repère l'événement-condition A (celui qui suit « sachant que »).
2. Prends le total de A comme dénominateur.
3. Prends l'effectif de la case « A et B » comme numérateur.

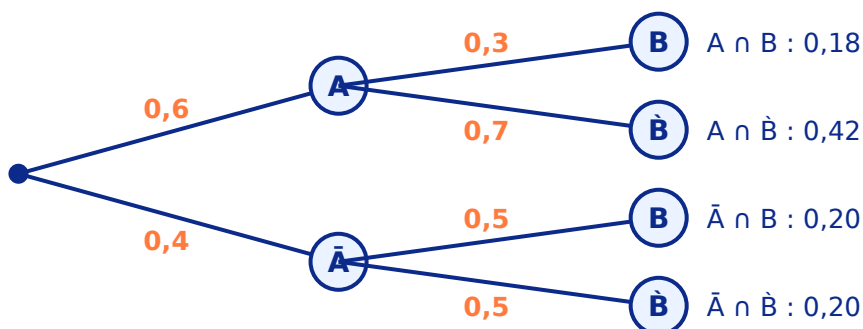
Remarque : les effectifs donnent le même résultat que la formule, car diviser  $P(F \cap L)$  par  $P(F)$  revient à diviser 42 par 60.

### Astuce

Si le tableau est en pourcentages ou en probabilités, c'est la même méthode :  $P_A(B) = P(A \cap B) \div P(A)$ , la case divisée par le total de la ligne ou de la colonne.

## 4. Arbres pondérés

Un **arbre pondéré** représente une expérience en plusieurs étapes. Chaque branche porte une probabilité ; au deuxième niveau, il s'agit d'une probabilité **conditionnelle** (sachant le chemin déjà parcouru).



### Règles de lecture d'un arbre

- **Règle des nœuds** : la somme des probabilités des branches qui partent d'un même nœud vaut 1 ( $0,3 + 0,7 = 1$  ;  $0,5 + 0,5 = 1$ ).
- **Règle du produit** : la probabilité d'un chemin (une feuille) est le produit des probabilités de ses branches. Ici  $P(A \cap B) = 0,6 \times 0,3 = 0,18$ .
- **Règle de la somme** : la probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins qui y mènent.

### Méthode : construire un arbre

1. Identifie les deux étapes et donne un nom à chaque événement.
2. Place sur les premières branches les probabilités simples, sur les suivantes les probabilités conditionnelles.
3. Complète avec les contraires pour que chaque nœud ait une somme égale à 1.
4. Multiplie le long des chemins, vérifie que le total des feuilles vaut 1.

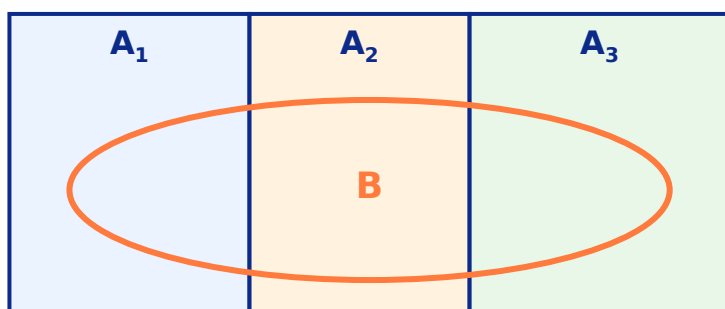
### Piège

Sur une branche du deuxième niveau, la probabilité est conditionnelle : 0,3 est  $P_A(B)$ , pas  $P(B)$ . On ne l'additionne jamais avec une probabilité d'un autre nœud.

## 5. Formule des probabilités totales

### Partition de l'univers

Des événements  $A_1, A_2, \dots, A_n$  de probabilités non nulles forment une **partition** de  $\Omega$  s'ils sont deux à deux incompatibles et si leur réunion est  $\Omega$ . Exemple le plus simple :  $A$  et  $\bar{A}$ .



Les  $A_1, A_2, A_3$  ne se chevauchent pas et remplissent tout l'univers

### Formule des probabilités totales

Si  $A_1, \dots, A_n$  forment une partition de  $\Omega$ , alors pour tout événement  $B$  :

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + \dots + P(A_n \cap B) = P(A_1) \times P_{A_1}(B) + \dots + P(A_n) \times P_{A_n}(B).$$

**Démonstration (cas de deux événements).** B est la réunion des deux événements incompatibles  $A \cap B$  et  $\bar{A} \cap B$ . Donc  $P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$ , puis on remplace chaque intersection par  $P(A) \times P_A(B)$  et  $P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(B)$ . Le cas général est identique.

### Exemple résolu

Avec l'arbre de la partie 4 :  $P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = 0,6 \times 0,3 + 0,4 \times 0,5 = 0,18 + 0,20 = 0,38$ . Sur l'arbre, on additionne les deux chemins qui aboutissent à B.

### Astuce de rédaction

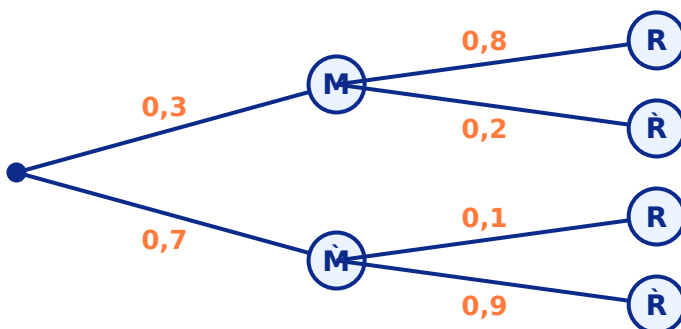
Écris toujours : « D'après la formule des probabilités totales, comme A et  $\bar{A}$  forment une partition de l'univers, ... ». Cette phrase fait partie de la démonstration attendue.

## 6. Inverser le conditionnement

Souvent, l'arbre donne  $P_A(B)$  mais on cherche  $P_B(A)$  : on remonte de la conséquence vers la cause. La méthode ne demande aucune formule nouvelle.

### Méthode

1. Calcule  $P(A \cap B)$  par la règle du produit.
2. Calcule  $P(B)$  par la formule des probabilités totales.
3. Conclut :  $P_B(A) = P(A \cap B) \div P(B)$ .



### Exemple résolu

Un robot de cuisine tombe en panne (R) avec une probabilité 0,8 s'il est mal entretenu (M, qui concerne 30 % des cas) et 0,1 s'il est bien entretenu. On sait que le robot est en panne : quelle est la probabilité qu'il ait été mal entretenu ?

$P(M \cap R) = 0,3 \times 0,8 = 0,24$  ;  $P(\bar{M} \cap R) = 0,7 \times 0,1 = 0,07$  ; donc  $P(R) = 0,24 + 0,07 = 0,31$ .

$P_R(M) = 0,24/0,31 = 24/31 \approx 0,774$ .

### Piège classique

Même un test très fiable peut donner une probabilité « sachant que le test est positif » étonnamment faible quand la maladie est rare : c'est le poids du premier niveau de l'arbre ( $P(M)$  petit). Fais toujours le calcul.

### Mathbot

Salut, c'est Mathbot ! Pour inverser un conditionnement, je dessine l'arbre, je calcule les deux chemins qui mènent à la conséquence, puis je divise le chemin qui m'intéresse par leur total. Zéro formule à apprendre par cœur.

## 7. Indépendance de deux événements

### Définition

Deux événements A et B sont **indépendants** lorsque  $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ .

Intuitivement : savoir que A est réalisé ne change pas la probabilité de B.

### Caractérisation

Si  $P(A) \neq 0$ , alors A et B sont indépendants si et seulement si  $P_A(B) = P(B)$ .

**Démonstration.**  $P_A(B) = P(A \cap B) \div P(A)$ . L'égalité  $P_A(B) = P(B)$  équivaut à  $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ .

### Événements contraires

Si A et B sont indépendants, alors A et  $\bar{B}$  le sont aussi, ainsi que  $\bar{A}$  et B, et  $\bar{A}$  et  $\bar{B}$ .

**Démonstration (A et  $\bar{B}$ ).**  $P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A) \times P(B) = P(A) \times (1 - P(B)) = P(A) \times P(\bar{B})$ .

### Méthode : montrer (ou réfuter) l'indépendance

1. Calcule  $P(A)$ ,  $P(B)$  et  $P(A \cap B)$ .
2. Compare  $P(A \cap B)$  et  $P(A) \times P(B)$ .
3. Si les nombres sont égaux : indépendants. S'ils diffèrent, même d'un peu : **non indépendants**.

### Exemple

Tirage d'une carte dans un jeu de 32 cartes. A : « roi » ( $P = 1/8$ ), B : « cœur » ( $P = 1/4$ ).  
 $A \cap B$  : « roi de cœur » ( $P = 1/32$ ). Comme  $1/8 \times 1/4 = 1/32$ , ces événements sont indépendants.

### Deux pièges à ne jamais confondre

**Incompatibles** ( $A \cap B = \emptyset$ ) n'est pas **indépendants**. Si  $P(A)$  et  $P(B)$  ne sont pas nuls et que A, B sont incompatibles, alors  $P(A \cap B) = 0 \neq P(A) \times P(B)$  : ils sont même fortement dépendants (si A se réalise, B ne peut plus se réaliser).

## 8. Répétition d'épreuves indépendantes

Lorsqu'on répète une expérience dans des conditions identiques, sans que le résultat de l'une influence les autres (lancers de pièce, tirages avec remise...), les épreuves sont **indépendantes**. Dans l'arbre, les probabilités du deuxième niveau sont alors **les mêmes** quelle que soit la branche d'origine :  $P_A(B) = P_{\bar{A}}(B) = P(B)$ .

### Exemple résolu

Une joueuse réussit un lancer franc avec la probabilité 0,75. Elle en tire deux, indépendamment.

- Deux réussis :  $0,75 \times 0,75 = 0,5625$ .
- Aucun réussi :  $0,25 \times 0,25 = 0,0625$ .
- Au moins un réussi :  $1 - 0,0625 = 0,9375$  (on passe par le contraire).
- Exactement un :  $2 \times 0,75 \times 0,25 = 0,375$  (deux chemins).

### Tirage sans remise

Quand on tire sans remettre, la composition de l'urne change : les tirages ne sont **pas** indépendants. Il faut utiliser des probabilités conditionnelles (par exemple **5/8** puis **4/7** pour deux boules rouges dans une urne de 5 rouges et 3 vertes).

## À retenir

- $P_A(B) = P(A \cap B) \div P(A)$ , avec  $P(A) \neq 0$  ; elle mesure la chance de B quand A est connu.
- $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = P(B) \times P_B(A)$  ;  $P_A(B) + P_A(\bar{B}) = 1$ .
- Arbre pondéré : somme des branches d'un nœud = 1 ; on multiplie le long d'un chemin ; on additionne les chemins qui mènent à un événement.

- Probabilités totales :  $P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$  (ou avec une partition de  $n$  événements).
- Inverser le conditionnement :  $P_B(A) = P(A \cap B) \div P(B)$ , avec  $P(B)$  obtenu par les probabilités totales.
- A et B indépendants  $\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \Leftrightarrow P_A(B) = P(B)$  ; alors  $\bar{A}$ ,  $\bar{B}$  le sont aussi.
- Incompatibles  $\neq$  indépendants. Sans remise, il n'y a pas d'indépendance.