

Probabilités conditionnelles et indépendance

Cours de maths - Terminale

Une information change souvent la probabilité d'un événement : la probabilité qu'un élève soit en retard n'est pas la même s'il vient en bus ou à vélo. Dans ce chapitre de Terminale, tu **formalises** cette idée avec les probabilités conditionnelles, tu apprends à **organiser** une situation à plusieurs étapes avec un arbre pondéré, à **inverser** un conditionnement grâce à la formule des probabilités totales, puis à reconnaître et à utiliser l'**indépendance** d'événements, de variables aléatoires et d'épreuves successives.

1. Rappel : la probabilité conditionnelle

Probabilité conditionnelle Soit A et B deux événements d'un même univers, avec $P(A) \neq 0$. La probabilité de B sachant A est le nombre

$$P_A(B) = P(A \cap B) / P(A)$$

On lit « probabilité de B sachant A ». C'est la probabilité que B se réalise *quand on sait que A est réalisé* : on se restreint à l'univers A.

Exemple Dans une classe de 40 élèves, 24 jouent d'un instrument (événement I), 15 font du théâtre (événement T) et 9 font les deux. On choisit un élève au hasard.

- $P(I) = 24/40 = 0,6$; $P(T) = 15/40 = 0,375$; $P(I \cap T) = 9/40 = 0,225$.
- $P_T(I) = P(I \cap T) / P(T) = 9/40 \div 15/40 = 9/15 = 0,6$: parmi les 15 élèves qui font du théâtre, 9 jouent d'un instrument.
- $P_I(T) = 9/24 = 0,375$: ce n'est pas la même chose !

Propriétés Pour $P(A) \neq 0$:

- $0 \leq P_A(B) \leq 1$ et $P_A(B) + P_A(\bar{B}) = 1$ (les probabilités sachant A forment une loi de probabilité).
- **Formule des probabilités composées** : $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$.
- Si $P(B) \neq 0$ aussi : $P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A)$.

Piège En général $P_A(B) \neq P_B(A)$. La probabilité qu'un champion de tennis soit un sportif n'est pas la probabilité qu'un sportif soit un champion de tennis. Écris toujours

l'événement « sachant » en indice.

Notation Selon les livres, on rencontre $P_A(B)$ ou $P(B | A)$. Les deux désignent la même probabilité ; dans ce chapitre on garde $P_A(B)$.

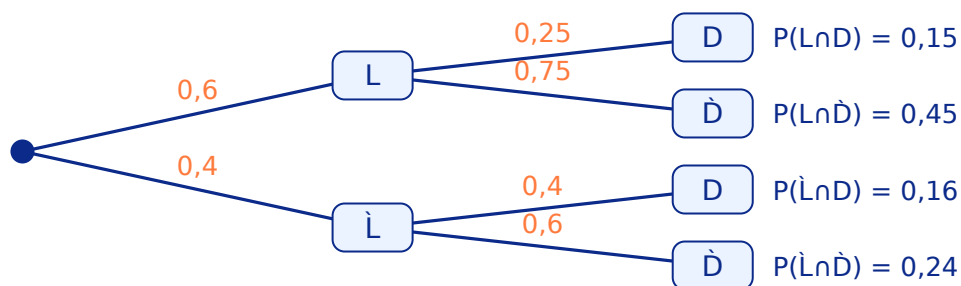
2. Les arbres pondérés

Quand une situation se déroule en plusieurs étapes, un **arbre pondéré** la résume : chaque nœud est un événement, chaque branche porte une probabilité.

Règles de lecture d'un arbre

1. **Somme à 1** : les probabilités des branches qui partent d'un même nœud ont pour somme 1.
2. **Branches de 1re étape** : elles portent les probabilités simples, par exemple $P(A)$.
3. **Branches de 2e étape** : elles portent des probabilités *conditionnelles*, par exemple $P_A(B)$, sachant le nœud d'où elles partent.
4. **Chemin** : la probabilité d'une intersection s'obtient en **multipliant** les probabilités le long du chemin : $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$.
5. **Plusieurs chemins** : pour un événement qui correspond à plusieurs chemins, on **additionne** les probabilités de ces chemins.

Exemple : une pizzeria 60 % des clients commandent en ligne (L). Parmi eux, 25 % ajoutent un dessert (D). Parmi ceux qui ne commandent pas en ligne, 40 % ajoutent un dessert. On a $P(L) = 0,6$, $P_L(D) = 0,25$ et $P_{\bar{L}}(D) = 0,4$.



Le chemin L puis D : $P(L \cap D) = 0,6 \times 0,25 = 0,15$. Le chemin $\bar{L}$ puis D : $P(\bar{L} \cap D) = 0,4 \times 0,4 = 0,16$. Les quatre chemins ont pour somme $0,15 + 0,45 + 0,16 + 0,24 = 1$.

3. Partition de l'univers et formule des probabilités totales

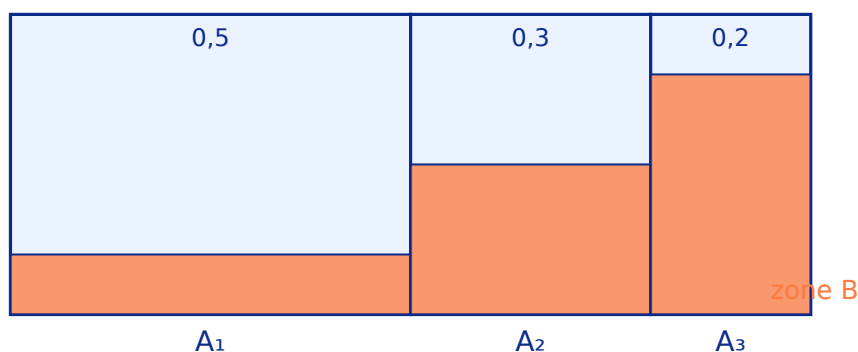
Partition de l'univers Des événements $A_1, A_2, \dots, A_n$ forment une **partition** de l'univers Ω lorsque : ils sont **non vides, deux à deux incompatibles** ($A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$) et leur réunion est Ω tout entier. Autrement dit, à chaque expérience, **un et un**

seul d'entre eux se réalise. Pour tout événement A , le couple $(A ; \bar{A})$ est une partition (si A n'est ni vide ni égal à Ω).

Formule des probabilités totales Si $A_1, \dots, A_n$ forment une partition de l'univers avec $P(A_i) \neq 0$, alors pour tout événement B :

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + \dots + P(A_n \cap B) = P(A_1) \times P_{A_1}(B) + \dots + P(A_n) \times P_{A_n}(B).$$

Démonstration. B est la réunion des événements $A_i \cap B$, deux à deux incompatibles car les A_i le sont. Donc $P(B) = \sum P(A_i \cap B)$, et chaque terme vaut $P(A_i) \times P_{A_i}(B)$ par la formule des probabilités composées.



Chaque bande A_i a une largeur proportionnelle à $P(A_i)$; la partie orange représente $A_i \cap B$. La probabilité de B est l'aire orange totale.

Exemple : une bibliothèque Les livres empruntés se répartissent en romans (R, 50 %), bandes dessinées (B, 30 %) et documentaires (E, 20 %). La proportion de livres rendus avec plus de deux semaines de retard (événement T) est de 10 % pour les romans, 20 % pour les BD et 40 % pour les documentaires. $(R ; B ; E)$ est une partition de l'univers, donc :

$$P(T) = 0,5 \times 0,1 + 0,3 \times 0,2 + 0,2 \times 0,4 = 0,05 + 0,06 + 0,08 = \mathbf{0,19}.$$

Dans un arbre, c'est exactement la somme des probabilités des chemins qui aboutissent à T .

Piège Pour appliquer la formule, les événements A_i doivent vraiment former une partition. Si deux d'entre eux peuvent se réaliser ensemble, ou s'il en manque un, la somme est fautive. Vérifie toujours que les $P(A_i)$ ont pour somme 1.

4. Inverser un conditionnement

On connaît souvent $P_A(B)$ (la cause donne l'effet) et on cherche $P_B(A)$ (de l'effet, remonter à la cause). On combine la définition et les probabilités totales.

Méthode

1. Calculer $P(A \cap B)$ en suivant le chemin de l'arbre.
2. Calculer $P(B)$ avec la formule des probabilités totales (somme des chemins qui mènent à B).
3. Conclure : $P_B(A) = \mathbf{P(A \cap B)/P(B)}$.

Exemple Dans la pizzeria, un client a pris un dessert. Quelle est la probabilité qu'il ait commandé en ligne ? On a $P(L \cap D) = 0,15$ et $P(D) = 0,15 + 0,16 = 0,31$, donc

$$P_D(L) = \mathbf{0,15/0,31 = 15/31 \approx 0,484}.$$

Alors que 60 % des clients commandent en ligne, parmi ceux qui prennent un dessert ils sont un peu moins de la moitié.

Astuce Un résultat contre-intuitif est fréquent : un test fiable à 95 % peut conduire à une probabilité assez faible d'être réellement concerné quand la situation recherchée est rare. Pour t'en convaincre, représente toujours un arbre avec des effectifs, par exemple « sur 10 000 personnes... ».

5. Indépendance de deux événements

Événements indépendants Deux événements A et B sont **indépendants** lorsque $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$. Si $P(A) \neq 0$, cela équivaut à $P_A(B) = P(B)$: savoir que A est réalisé ne change pas la probabilité de B.

Exemple : un jeu de 32 cartes On tire une carte au hasard. A : « cœur » ($P(A) = 8/32 = 1/4$), B : « roi » ($P(B) = 4/32 = 1/8$). Il n'y a qu'un roi de cœur : $P(A \cap B) = 1/32 = 1/4 \times 1/8$. Donc A et B sont **indépendants**. Avec C : « carte rouge » ($P(C) = 1/2$) : A est inclus dans C, donc $P(A \cap C) = 1/4$, alors que $P(A) \times P(C) = 1/8$. A et C ne sont **pas** indépendants.

Propriété Si A et B sont indépendants, alors A et $\bar{B}$, $\bar{A}$ et B, $\bar{A}$ et $\bar{B}$ le sont aussi.

Démonstration (pour A et $\bar{B}$). A est la réunion disjointe de $A \cap B$ et $A \cap \bar{B}$, donc $P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A)P(B) = P(A)(1 - P(B)) = P(A) \times P(\bar{B})$. Les autres cas se démontrent de la même façon.

Ne confonds pas indépendants et incompatibles Incompatibles : $A \cap B = \emptyset$, donc $P(A \cap B) = 0$. Indépendants : $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Si $P(A)$ et $P(B)$ sont non nuls, deux événements incompatibles ne sont **jamais** indépendants : réaliser A rend B impossible, donc l'information « A est réalisé » change bien la probabilité de B.

Méthode : prouver ou réfuter l'indépendance

1. Calculer $P(A)$, $P(B)$ et $P(A \cap B)$.
2. Comparer $P(A \cap B)$ avec $P(A) \times P(B)$.
3. Égalité : indépendants. Sinon : non indépendants. Un seul calcul suffit pour réfuter.

6. Indépendance de variables aléatoires

Variables aléatoires indépendantes Deux variables aléatoires X et Y (définies sur le même univers, à valeurs x_i et y_j) sont **indépendantes** lorsque, pour tous i et j : $P(X = x_i \text{ et } Y = y_j) = P(X = x_i) \times P(Y = y_j)$. Autrement dit, les événements $\{X = x_i\}$ et $\{Y = y_j\}$ sont indépendants pour toutes les valeurs.

Somme de variables aléatoires

- Toujours : $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.
- Si X et Y sont **indépendantes** : $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$, donc $\sigma(X + Y) = \sqrt{V(X) + V(Y)}$. Attention, les écarts-types ne s'additionnent pas.

Exemple X prend les valeurs 0 et 1 avec $P(X = 1) = 0,6$; Y prend les valeurs 0 et 2 avec $P(Y = 2) = 0,5$; X et Y sont indépendantes. La loi de $S = X + Y$ se déduit des produits :

s	0	1	2	3
$P(S = s)$	$0,4 \times 0,5 = 0,2$	$0,6 \times 0,5 = 0,3$	$0,4 \times 0,5 = 0,2$	$0,6 \times 0,5 = 0,3$

$E(S) = 0,3 + 0,4 + 0,9 = 1,6 = E(X) + E(Y) = 0,6 + 1$. Pour la variance : $V(X) = 0,6 \times 0,4 = 0,24$ et $V(Y) = 0,5 \times 4 - 1 = 1$, et un calcul direct donne $V(S) = 3,8 - 1,6^2 = 1,24 = 0,24 + 1$.

7. Succession d'épreuves indépendantes

Épreuves indépendantes On répète une expérience dans des conditions qui ne s'influencent pas (lancers de dé ou de pièce, tirages avec remise, tirs successifs...). L'issue d'une épreuve n'a aucune incidence sur les suivantes : on dit que les épreuves sont **indépendantes**.

Propriété La probabilité d'une liste d'issues dans une succession d'épreuves indépendantes est le **produit** des probabilités de chaque issue. Dans l'arbre, les branches de deuxième étape sont donc les mêmes quel que soit le nœud de départ.

Exemple Un joueur de fléchettes touche la cible avec la probabilité 0,3 à chaque lancer, indépendamment des autres. Sur 3 lancers :

- $P(\text{trois réussites}) = 0,3^3 = 0,027$.
- $P(\text{aucune réussite}) = 0,7^3 = 0,343$.
- $P(\text{au moins une réussite}) = 1 - 0,343 = \mathbf{0,657}$ (événement contraire).
- $P(\text{exactement une réussite}) = 3 \times 0,3 \times 0,7^2 = 0,441$: 3 chemins (R·E·E, E·R·E, E·E·R), chacun de probabilité $0,3 \times 0,7^2$.

« **Au moins un** » en **n épreuves** Si chaque épreuve a une probabilité p de succès (épreuves indépendantes), alors $P(\text{au moins un succès sur } n) = 1 - (1 - p)^n$. Cette idée est le point de départ du schéma de Bernoulli et de la loi binomiale.

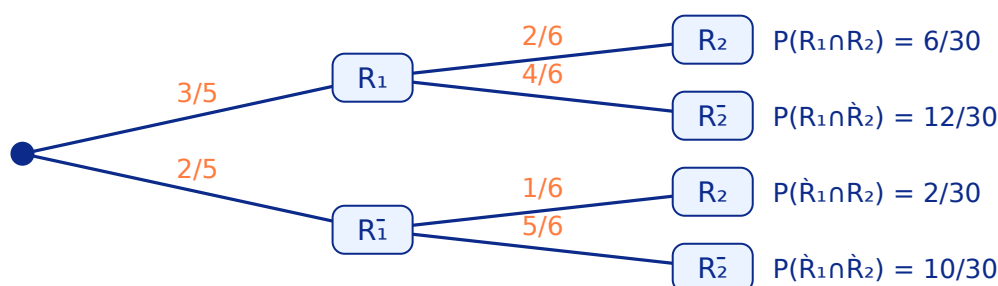
Astuce Pour « au moins un », passe toujours par l'événement contraire « aucun », qui est un simple produit. Pour trouver le nombre d'épreuves nécessaires, résous une inéquation du type $(1 - p)^n \leq \epsilon$, avec la calculatrice ou un logarithme.

8. Problèmes à plusieurs étapes : mode d'emploi

Méthode

1. **Nommer** les événements avec des lettres claires et écrire les données sous la forme $P(\dots) = \dots$ ou $P_{\dots}(\dots) = \dots$.
2. **Dessiner l'arbre** en suivant l'ordre chronologique et en plaçant les probabilités conditionnelles sur les branches.
3. **Identifier** les chemins qui réalisent l'événement demandé, multiplier le long des chemins, additionner entre chemins.
4. Si l'énoncé donne « sachant que » dans l'ordre inverse de l'arbre, passer par $P(A \cap B)$ puis diviser.
5. **Contrôler** : toutes les probabilités sont entre 0 et 1, les branches d'un nœud ont pour somme 1.

Exemple : un tirage avec transfert L'urne U contient 3 boules rouges et 2 vertes ; l'urne V contient 1 rouge et 4 vertes. On tire une boule de U, on la place dans V (qui compte alors 6 boules), puis on tire une boule dans V. R_1 : « la première boule est rouge » ; R_2 : « la seconde est rouge ».



a. $P(R_2) = \mathbf{6/30 + 2/30 = 8/30 = 4/15}$ (partition R_1 ; $\bar{R}_1$).

b. La seconde boule est rouge : quelle est la probabilité que la première l'ait été

aussi ? $P_{R_2}(R_1) = 6/30 \div 8/30 = 3/4$.

Mathbot, le robot-coach « Un énoncé qui dit “sachant que” te demande de te placer dans un univers plus petit. Divise toujours par la probabilité de ce qui est connu. »

À retenir

- $P_A(B) = \mathbf{P(A \cap B) / P(A)}$ (avec $P(A) \neq 0$) ; $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$.
- Dans un arbre pondéré : on multiplie le long d'un chemin, on additionne les chemins ; la somme des branches issues d'un nœud vaut 1.
- Partition : événements non vides, incompatibles deux à deux, de réunion Ω .
Probabilités totales : $P(B) = \sum P(A_i) \times P_{A_i}(B)$.
- Pour inverser un conditionnement : $P_B(A) = \mathbf{P(A \cap B) / P(B)}$, avec $P(B)$ obtenu par les probabilités totales.
- A et B indépendants $\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B) \Leftrightarrow P_A(B) = P(B)$ (si $P(A) \neq 0$). Alors A et B, $\bar{A}$ et B, $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont aussi indépendants.
- Incompatibles (non nuls) $\Rightarrow$ jamais indépendants.
- X et Y indépendantes : $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$ et $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$.
- Épreuves indépendantes : on multiplie les probabilités ; $P(\text{au moins un succès}) = 1 - (1 - p)^n$.