

Probabilités conditionnelles et indépendance

Exercices de maths - Terminale

24 exercices classés par difficulté (★ facile, ★★ moyen, ★★★ difficile). Cherche d'abord sans regarder le corrigé !

1 Un dé à six faces ★★★

On lance un dé équilibré à six faces. A : « le résultat est pair » ; B : « le résultat est un multiple de 3 ».

- Calcule $P(A)$, $P(B)$ et $P(A \cap B)$.
- Calcule $P_A(B)$ et $P_B(A)$.
- Explique pourquoi ces deux probabilités sont différentes.

2 Lecture d'un tableau d'effectifs ★★★

Un club propose deux activités à ses 150 adhérents : la natation (N) ou le tennis (T). On a relevé la répartition suivante entre jeunes (J) et adultes (Ad).

	Natation	Tennis
Jeunes	36	24
Adultes	30	60

On choisit un adhérent au hasard. Calcule $P(J)$, $P(N \cap J)$, $P_J(N)$ puis $P_N(J)$ (valeur exacte).

3 Compléter un arbre ★★★

Pour deux événements A et B, on sait que $P(A) = 0,4$; $P_A(B) = 0,7$ et $P_{\bar{A}}(B) = 0,2$.

- Construis l'arbre pondéré et complète toutes les branches.
- Calcule $P(A \cap B)$, $P(\bar{A} \cap B)$ puis $P(B)$.

4 Vrai ou faux ? ★★★

Pour chaque affirmation, dis si elle est vraie ou fausse, puis justifie ($P(A)$ et $P(B)$ sont non nuls).

- a. $P_A(B) = P_B(A)$ pour tous événements A et B.
- b. $P_A(B) + P_A(\bar{B}) = 1$.
- c. $P_A(B) + P_{\bar{A}}(B) = 1$.
- d. Si $P(A) = 0,3$ et $P(A \cap B) = 0,12$, alors $P_{\bar{A}}(B) = 0,4$.

5 Deux tirages sans remise ★★★

Une urne contient 5 boules rouges et 3 boules bleues. On tire successivement deux boules *sans remise*. R_1 : « la 1^{re} boule est rouge » ; R_2 : « la 2^e boule est rouge ».

- a. Construis l'arbre pondéré.
- b. Calcule $P(R_2)$ avec la formule des probabilités totales.

6 Indépendants ou pas ? ★★★

On sait que $P(A) = 0,5$; $P(B) = 0,4$ et $P(A \cup B) = 0,7$. Les événements A et B sont-ils indépendants ?

7 Reconnaître une partition ★★★

On lance un dé équilibré à six faces. Parmi les familles d'événements suivantes, lesquelles forment une partition de l'univers ? Justifie.

- a. $\{1 ; 2\}, \{3 ; 4\}, \{5 ; 6\}$.
- b. $\{1 ; 2 ; 3\}, \{3 ; 4\}, \{5 ; 6\}$.
- c. $\{1 ; 2\}, \{3 ; 4\}$.
- d. « le résultat est un nombre premier », « le résultat est un carré parfait », « autre résultat ».

8 Deux machines ★★★

Une usine fabrique des vis avec deux machines. La machine A produit 60 % des vis et la machine B les 40 % restantes. 2 % des vis de la machine A sont défectueuses, contre 5 % de celles de la machine B. On prélève une vis au hasard ; D : « la vis est défectueuse ».

- a. Dessine l'arbre pondéré.
- b. Calcule $P(D)$.
- c. La vis est défectueuse : quelle est la probabilité qu'elle vienne de la machine A ?

9 Un test de dépistage ★★★

Une maladie touche 2 % d'une population. Un test la détecte chez 95 % des malades (T

: « test positif »). Chez les personnes saines, le test est quand même positif dans 10 % des cas. On choisit une personne au hasard ; M : « la personne est malade ».

- Représente la situation par un arbre pondéré.
- Calcule $P(T)$.
- Le test est positif : calcule la probabilité d'être malade (arrondie au millième).
Commente.

10 Trois urnes ★★★

On lance un dé équilibré. Si on obtient 1, 2 ou 3, on tire une boule dans l'urne U_1 ; si on obtient 4 ou 5, dans l'urne U_2 ; si on obtient 6, dans l'urne U_3 . La proportion de boules rouges est de $\frac{1}{4}$ dans U_1 , $\frac{1}{2}$ dans U_2 et $\frac{3}{4}$ dans U_3 . R : « la boule tirée est rouge ».

- Justifie que $(U_1 ; U_2 ; U_3)$ est une partition et donne $P(U_1)$, $P(U_2)$, $P(U_3)$.
- Calcule $P(R)$.
- La boule est rouge : quelle est la probabilité qu'elle vienne de U_3 ?

11 Orientation et indépendance ★★★

Dans un lycée, 200 élèves de Terminale ont choisi leur deuxième langue : espagnol (E) ou allemand (L). On note F : « l'élève est une fille ».

- Premier lycée : filles 72 en espagnol et 48 en allemand ; garçons 48 en espagnol et 32 en allemand. F et E sont-ils indépendants ?
- Second lycée (200 élèves aussi) : filles 80 en espagnol et 40 en allemand ; garçons 30 en espagnol et 50 en allemand. F et E sont-ils indépendants ? Dans ce cas, calcule $P_F(E)$ et $P(E)$.

12 Calculs avec deux événements indépendants ★★★

A et B sont deux événements indépendants avec $P(A) = 0,3$ et $P(B) = 0,5$. Calcule $P(A \cap B)$, $P(A \cup B)$, $P(\bar{A} \cap \bar{B})$ et $P(\bar{A} \cap B)$. Que remarques-tu pour $P(\bar{A} \cap \bar{B})$ et $P(A \cup B)$?

13 Trois lancers d'une pièce ★★★

On lance trois fois une pièce équilibrée (les lancers sont indépendants). Calcule la probabilité d'obtenir : a. trois « pile » ; b. au moins un « pile » ; c. exactement deux « pile ».

14 Un archer ★★★

Un archer atteint la cible avec la probabilité 0,8 à chaque tir, les tirs étant indépendants. Il tire quatre fois. Calcule la probabilité : a. de toucher la cible quatre fois ; b. de ne la toucher jamais ; c. de la toucher au moins une fois ; d. de la toucher exactement une fois.

15 Combien de lancers ? ★★★

On lance un dé équilibré plusieurs fois de suite. Quel est le nombre minimal de lancers pour que la probabilité d'obtenir au moins un 6 soit supérieure ou égale à 0,95 ?

16 Somme de deux variables indépendantes ★★★

X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes. X prend les valeurs 0, 1, 2 avec les probabilités 0,5 ; 0,3 ; 0,2. Y prend les valeurs 1 et 3 avec les probabilités 0,4 et 0,6.

- Calcule $P(X = 2 \text{ et } Y = 3)$.
- Calcule $E(X)$, $V(X)$, $E(Y)$, $V(Y)$.
- Déduis-en $E(X + Y)$ et $V(X + Y)$.
- Détermine la loi de $X + Y$ et vérifie par un calcul direct l'espérance trouvée.

17 Le trajet du matin ★★★

Un élève vient au lycée à vélo (45 % des jours), à pied (35 %) ou en bus (20 %). Sa probabilité d'arriver en retard est de 0,05 à vélo, 0,12 à pied et 0,25 en bus. On choisit un jour au hasard ; R : « l'élève est en retard ».

- Construis un arbre pondéré.
- Calcule $P(R)$.
- L'élève est en retard : calcule la probabilité qu'il soit venu en bus, puis à vélo (valeurs arrondies au millième).
- Sur quel mode de transport l'élève devrait-il agir en priorité pour réduire ses retards ? Justifie.

18 Deux contrôles successifs ★★★

Dans une chaîne de production, 6 % des pièces sont défectueuses. Chaque pièce subit deux contrôles indépendants : le premier détecte un défaut avec la probabilité 0,9, le second avec la probabilité 0,8. Une pièce est rejetée dès qu'un contrôle détecte un défaut ; une pièce sans défaut n'est jamais rejetée. D : « la pièce est défectueuse » ; S : « la pièce est acceptée ».

- Montre que la probabilité qu'une pièce défectueuse ne soit détectée par aucun des deux contrôles est 0,02.

- b. Calcule $P(DnS)$ puis $P(S)$.
- c. Une pièce acceptée est choisie au hasard : quelle est la probabilité qu'elle soit défectueuse (arrondie à 10^{-4}) ?

19 Trouver une probabilité inconnue ★★★

Les événements A et B sont indépendants, avec $P(A) = 0,4$ et $P(A \cup B) = 0,76$. Détermine $P(B)$, puis $P(A \cap B)$, puis $P_{\bar{A}}(B)$.

20 Démontre l'indépendance du contraire ★★★

Soit A et B deux événements indépendants. Démontre que $\bar{A}$ et B sont indépendants, puis que $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont indépendants.

21 Les deux enfants ★★★

Une famille a deux enfants. On suppose que chaque enfant est une fille ou un garçon avec la même probabilité, indépendamment de l'autre. Détermine la probabilité que les deux enfants soient des filles : a. sachant que l'aîné est une fille ; b. sachant qu'au moins un des deux enfants est une fille. Commente.

22 Trois portes ★★★

Un jeu télévisé cache une voiture derrière l'une de trois portes, des chèvres derrière les deux autres. Tu choisis une porte ; le présentateur, qui sait où est la voiture, ouvre alors une *autre* porte derrière laquelle se trouve une chèvre, puis te propose de changer de porte. Soit G : « ton choix initial est la bonne porte ».

- a. Donne $P(G)$ et $P(\bar{G})$.
- b. Si tu gardes ta porte, quelle est la probabilité de gagner ? Si tu changes ?
- c. Quelle stratégie conseilles-tu ?

23 Un match en deux sets gagnants ★★★

Deux joueurs, Léa et Tom, s'affrontent dans un match en deux sets gagnants (le match s'arrête dès qu'un joueur a gagné deux sets). Léa gagne chaque set avec la probabilité 0,6, les sets étant indépendants. L : « Léa gagne le match » ; T : « le match va à trois sets ».

- a. Énumère les issues possibles du match.
- b. Calcule $P(L)$.
- c. Calcule $P(T)$.

d. Léa a gagné le match : quelle est la probabilité qu'il se soit joué en trois sets ?

24 Fiabilité d'un système ★★★

Un système est composé de composants qui tombent en panne indépendamment les uns des autres. Le composant 1 fonctionne avec la probabilité 0,9, le composant 2 avec 0,8.

- Montage *en série* (le système fonctionne seulement si les deux composants fonctionnent) : calcule la probabilité de fonctionnement.
- Montage *en parallèle* (il suffit qu'un des deux fonctionne) : calcule la probabilité de fonctionnement.
- On place maintenant le composant 1 en série avec un bloc formé de deux composants identiques en parallèle, chacun de fiabilité 0,7. Calcule la probabilité de fonctionnement du système, puis la probabilité que le bloc parallèle fonctionne sachant que le composant 1 fonctionne.