

Probabilités

Cours de maths - 3ème

Les probabilités servent à **mesurer le hasard** : quelle chance a-t-on de gagner à un jeu, de tirer une boule rouge, d'avoir deux filles dans une fratrie ? En 3ème, tu précises ton vocabulaire, tu calcules des probabilités avec des événements contraires ou qui se recoupent, tu utilises des **arbres** et des **tableaux** pour les expériences à deux épreuves, puis tu relies probabilités et **fréquences** grâce à la simulation.

Rappels utiles Une probabilité s'écrit en fraction, en nombre décimal ou en pourcentage : $\frac{1}{2} = 0,5 = 50\%$. Pour simplifier une fraction, on divise le haut et le bas par le même nombre : $\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$. Pour additionner des fractions, on les met sur le même dénominateur.

1. Vocabulaire des expériences aléatoires

Expérience aléatoire, issue, univers Une **expérience aléatoire** est une expérience dont on connaît tous les résultats possibles, mais dont on ne peut pas prévoir le résultat à l'avance (lancer un dé, tirer une carte, faire tourner une roue). Chaque résultat possible s'appelle une **issue**. L'ensemble de toutes les issues s'appelle l'**univers**.

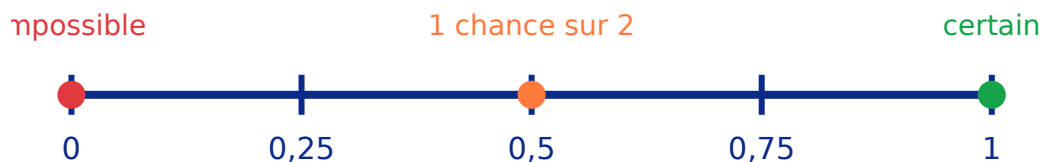
Événement Un **événement** est un ensemble d'issues. Un événement qui ne contient qu'une seule issue est un **événement élémentaire**. Un événement qui ne se réalise jamais est **impossible** ; un événement qui se réalise toujours est **certain**.

Exemple On lance un dé à 6 faces. L'univers est $\{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$: il y a 6 issues. L'événement A « obtenir un nombre pair » est réalisé par les 3 issues 2, 4 et 6. L'événement « obtenir 7 » est impossible ; l'événement « obtenir un nombre inférieur à 7 » est certain.

Piège Une issue est un résultat précis, pas un événement général. Pour un tirage de carte, « un cœur » est un événement (8 issues dans un jeu de 32 cartes) alors que « le roi de cœur » est une issue.

2. La probabilité d'un événement

Probabilité La **probabilité** d'un événement A, notée $P(A)$, est un nombre qui mesure la chance que A se réalise. On la compare à une échelle qui va de 0 à 1.



Plus la probabilité est proche de 1, plus l'événement est « probable » ; plus elle est proche de 0, plus il est « rare ».

À savoir • Pour tout événement A, $0 \leq P(A) \leq 1$.

- Un événement impossible a pour probabilité 0 ; un événement certain a pour probabilité 1.
- La somme des probabilités de toutes les issues d'une expérience est égale à 1.

Jamais de probabilité négative ni supérieure à 1 Si ton calcul donne $5/4$ ou $-0,2$, il y a une erreur quelque part. Relis ta démarche.

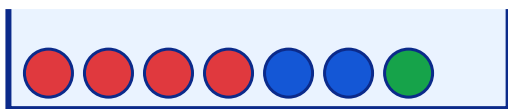
3. Situation d'équiprobabilité

Équiprobabilité Il y a **équiprobabilité** quand toutes les issues ont la même probabilité : le dé est équilibré, les jetons sont indiscernables au toucher, la roue est partagée en secteurs identiques. On dit alors que l'on choisit « au hasard ».

Calcul de la probabilité En situation d'équiprobabilité, pour un événement A : **$P(A) = \text{nombre d'issues qui réalisent A} \div \text{nombre total d'issues}$** , soit $P(A) = (\text{nombre de cas favorables}) \div (\text{nombre de cas possibles})$.

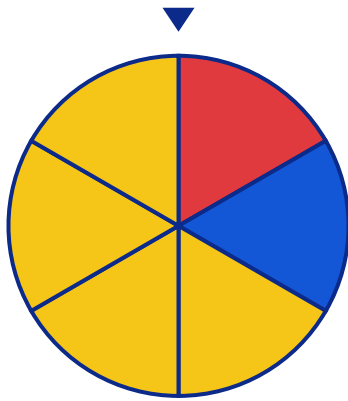
Exemple : un jeu de 32 cartes On tire une carte au hasard. $P(\text{« roi »}) = 4/32 = 1/8$ car il y a 4 rois parmi 32 cartes. $P(\text{« cœur »}) = 8/32 = 1/4$ car il y a 8 cœurs.

Voici une urne avec 4 jetons rouges, 2 bleus et 1 vert. On tire un jeton au hasard :



$P(\text{rouge}) = 4/7$; $P(\text{bleu}) = 2/7$; $P(\text{vert}) = 1/7$. La somme fait bien $7/7 = 1$.

Attention : « deux issues » ne veut pas dire « une chance sur deux » Sur la roue ci-dessous, il y a 3 couleurs, mais les secteurs ne sont pas identiques : les couleurs n'ont pas la même probabilité. La formule « cas favorables $\div$ cas possibles » ne s'applique qu'en équiprobabilité. Pour la somme de deux dés, il y a 11 résultats possibles (de 2 à 12), mais ils ne sont pas équiprobables !



Méthode 1) Je vérifie qu'il y a équiprobabilité. 2) Je compte toutes les issues possibles. 3) Je compte les issues favorables. 4) J'écris le quotient et je le simplifie si possible.

4. Événements incompatibles et événement contraire

Événements incompatibles Deux événements sont **incompatibles** s'ils ne peuvent pas se réaliser en même temps : aucune issue ne les réalise tous les deux.

Probabilité d'une réunion d'événements incompatibles Si A et B sont incompatibles, alors $P(A \text{ ou } B) = P(A) + P(B)$.

Événement contraire L'**événement contraire** d'un événement A, noté $\bar{A}$ (« non A »), est réalisé par toutes les issues qui ne réalisent pas A. A et $\bar{A}$ sont incompatibles et, à eux deux, ils couvrent toutes les issues.

À savoir $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

Exemple On lance un dé à 6 faces. A : « obtenir 5 ou 6 » ; $P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. L'événement contraire $\bar{A}$ est « obtenir 1, 2, 3 ou 4 » et $P(\bar{A}) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$. On retrouve bien $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

Astuce « au moins un » Pour « obtenir au moins un 6 en deux lancers », il est souvent plus rapide de calculer la probabilité du contraire (« aucun 6 ») et de faire $1 - \dots$

5. Intersection et union de deux événements

Notations « A et B » est l'événement $A \cap B$ (« A inter B ») : il est réalisé par les issues qui réalisent A **et** B. « A ou B » est l'événement $A \cup B$ (« A union B ») : il est réalisé par les issues qui réalisent A **ou** B (ou les deux). Deux événements sont incompatibles si $A \cap B$ ne contient aucune issue.

Formule générale Pour deux événements A et B quelconques : $P(A \cup B) = P(A) +$

$P(B) - P(A \cap B)$. On retranche $P(A \cap B)$ car les issues communes ont été comptées deux fois.

Exemple Dé à 6 faces. A : « nombre pair » = $\{2 ; 4 ; 6\}$. B : « nombre supérieur ou égal à 4 » = $\{4 ; 5 ; 6\}$. Alors $A \cap B = \{4 ; 6\}$ et $A \cup B = \{2 ; 4 ; 5 ; 6\}$.

$P(A) = \frac{3}{6}$; $P(B) = \frac{3}{6}$; $P(A \cap B) = \frac{2}{6}$; $P(A \cup B) = \frac{3}{6} + \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. On vérifie en comptant : 4 issues sur 6.

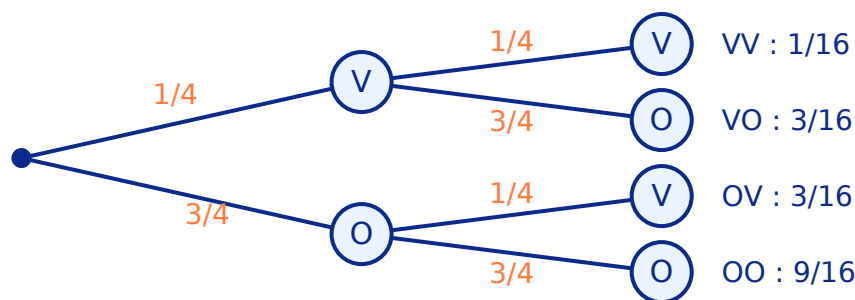
6. Expériences à deux épreuves : l'arbre de probabilités

Expérience à deux épreuves C'est une expérience formée de deux épreuves successives (deux lancers, deux tirages, une roue puis un dé...). Une issue est alors un **couple** de résultats, par exemple $(V ; O)$. On organise tout dans un **arbre** : chaque branche porte la probabilité du résultat correspondant.

Règles de l'arbre

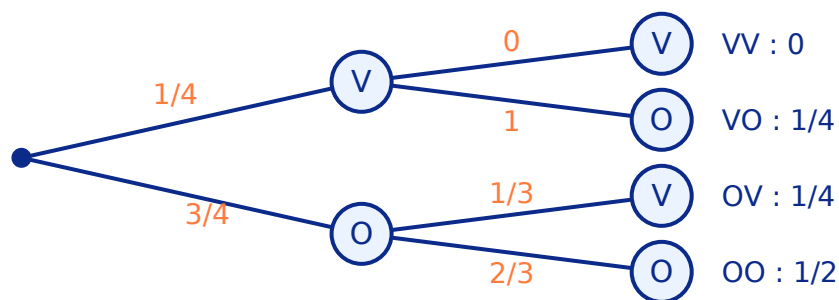
- 1) Sur les branches qui partent d'un même point, la somme des probabilités vaut 1.
- 2) La probabilité d'une issue (un chemin) est le **produit** des probabilités rencontrées le long du chemin.
- 3) La probabilité d'un événement est la **somme** des probabilités des chemins qui le réalisent.

Tirage avec remise Un sac contient 1 boule verte (V) et 3 boules orange (O). On tire une boule, on la remet, puis on en tire une seconde. Les probabilités sont les mêmes aux deux tirages.



$P(VV) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$; $P(VO) = \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{16}$; $P(OO) = \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$. L'événement « une seule boule verte » est réalisé par VO et OV : $P = \frac{3}{16} + \frac{3}{16} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$.

Tirage sans remise Même sac, mais on ne remet pas la première boule. Les probabilités du second tirage changent : si la première boule est verte, il reste 3 boules orange ; si elle est orange, il reste 1 verte et 2 orange.



$P(VO) = \frac{1}{4} \times 1 = \frac{1}{4}$; $P(OV) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$; $P(OO) = \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$; $P(VV) = 0$. Total : $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 1$.

Avec ou sans remise ? Lis bien l'énoncé : « sans remise » ou « en même temps » veut dire que le contenu du sac change après le premier tirage. Il faut alors recalculer les probabilités de la deuxième série de branches.

7. Tableaux à double entrée

Quand les deux épreuves ont peu d'issues, on peut aussi dresser un **tableau à double entrée** : une ligne pour chaque résultat de la première épreuve, une colonne pour chaque résultat de la seconde. Chaque case est une issue.

Somme de deux dés à 4 faces On lance deux dés tétraédriques équilibrés (faces 1 à 4) et on note la somme.

+	1	2	3	4
1	2	3	4	5
2	3	4	5	6
3	4	5	6	7
4	5	6	7	8

Il y a $4 \times 4 = 16$ cases, toutes équiprobables. La somme 5 apparaît dans 4 cases : $P(\text{somme} = 5) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$.
La somme 2 n'apparaît qu'une fois : $P(\text{somme} = 2) = \frac{1}{16}$.

Méthode Je dresse le tableau, je compte le nombre total de cases, je compte les cases qui réalisent l'événement et j'écris le quotient. Je précise toujours que les 16 issues sont équiprobables avant de conclure.

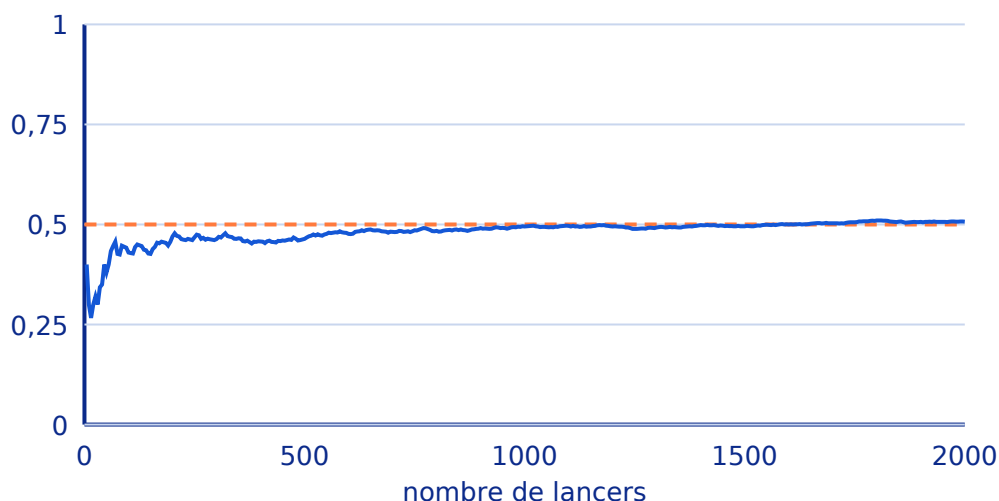
8. Fréquence et stabilisation

Fréquence Si on répète une expérience n fois et que l'événement A se réalise k fois, la **fréquence** de A est $k \div n$. C'est un nombre mesuré sur une série d'essais, qui change d'une série à l'autre.

Stabilisation des fréquences Quand le nombre d'essais devient très grand, la fréquence d'un événement se **rapproche de sa probabilité**. On peut donc **estimer** une probabilité inconnue par la fréquence observée sur un grand nombre d'essais.

Voici une simulation de 2 000 lancers d'une pièce équilibrée. On note la fréquence de « Pile » :

Nombre de lancers	10	100	500	1 000	2 000
Fréquence de Pile	0,300	0,430	0,464	0,495	0,507



Au début la courbe bouge beaucoup ; ensuite elle se rapproche de la droite en pointillés (0,5), qui est la probabilité théorique.

Mathbot te dit Sur 10 lancers, 7 Piles ne prouvent pas que la pièce est truquée ! Il faut un grand nombre d'essais avant de tirer une conclusion.

Le hasard n'a pas de mémoire Après cinq Piles de suite, la probabilité d'obtenir Pile au lancer suivant est toujours **1/2**. La stabilisation concerne les fréquences sur un grand nombre d'essais, pas le prochain tirage.

9. Simuler une expérience aléatoire

Simulation Simuler une expérience, c'est la reproduire un très grand nombre de fois avec un tableur, une calculatrice ou un programme, qui fournit des **nombre**s **choisis au hasard**. On étudie ensuite les fréquences obtenues.

Méthode avec un tableur • Un dé à 6 faces : **=ALEA.ENTRE.BORNES(1;6)** donne un entier de 1 à 6.

- Une pièce : **=ALEA.ENTRE.BORNES(0;1)** avec 0 pour Pile et 1 pour Face.
- Un événement de probabilité **3/10** : on tire un entier de 1 à 10 et on décide que l'événement est réalisé quand le résultat est 1, 2 ou 3.

On recopie la formule vers le bas (par exemple 1 000 lignes), puis on calcule la

fréquence des résultats voulus.

Exemple Pour simuler « tirer une boule verte » dans un sac avec 1 verte sur 4 boules : on tire un entier de 1 à 4 et « 1 » signifie « verte ». Sur 1 000 simulations, la fréquence de « 1 » sera proche de $\frac{1}{4} = 0,25$.

Une simulation donne une estimation, pas une valeur exacte Si tu relances la simulation, tu obtiens d'autres fréquences : elles seront proches de la probabilité, mais rarement égales.

À retenir

- Une probabilité est un nombre compris entre 0 et 1 ; 0 pour un événement impossible, 1 pour un événement certain ; la somme des probabilités de toutes les issues vaut 1.
- En situation d'équiprobabilité : $P(A) = \text{nombre de cas favorables} \div \text{nombre de cas possibles}$.
- Événement contraire : $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$. Événements incompatibles : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
- Cas général : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
- Dans un arbre, on multiplie les probabilités le long d'un chemin et on additionne les chemins qui réalisent l'événement ; sur chaque nœud, la somme des branches vaut 1.
- Avec ou sans remise : sans remise, les probabilités de la deuxième épreuve changent.
- Une fréquence mesurée sur un grand nombre d'essais est proche de la probabilité ; on peut simuler une expérience avec un tableur pour estimer une probabilité.