

Probabilités

Cours de maths - 4ème

Pile ou face ? Quelle couleur va sortir sur la roue de la fête foraine ? Dans ce chapitre, tu apprends à **mesurer le hasard avec un nombre entre 0 et 1** : la probabilité. Tu sauras calculer des probabilités quand toutes les issues ont autant de chances, utiliser l'événement contraire, et comprendre pourquoi des expériences répétées permettent d'estimer une probabilité.

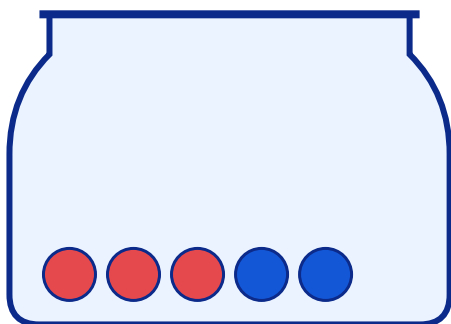
1. Expérience aléatoire et issues

Expérience aléatoire Une **expérience aléatoire** est une expérience dont on connaît tous les résultats possibles à l'avance, mais dont on ne peut pas prévoir le résultat avant de la faire. Chaque résultat possible s'appelle une **issue**. L'ensemble de toutes les issues est l'**univers** de l'expérience.

Exemples

- On lance un dé cubique et on lit la face du dessus : les issues sont 1, 2, 3, 4, 5 et 6. Il y a 6 issues.
- On tire une boule dans un sac contenant 3 boules rouges et 2 boules bleues : il y a 5 boules donc 5 issues si l'on distingue chaque boule, ou 2 issues si l'on note seulement la couleur (« rouge », « bleue »).
- Calculer 7×8 n'est pas une expérience aléatoire : le résultat est toujours 56.

Astuce Avant de calculer quoi que ce soit, **écris la liste de toutes les issues**. C'est la clé de presque tous les exercices de probabilités.



Une urne : 3 boules rouges, 2 boules bleues. Tirer une boule au hasard est une expérience aléatoire.

2. Événements

Événement Un **événement** est une condition que l'on peut vérifier à l'issue de l'expérience. Il est formé d'une ou de plusieurs issues : on dit qu'elles le **réalisent**.

Exemple On lance un dé. L'événement A : « obtenir un nombre pair » est réalisé par les issues 2, 4 et 6. L'événement B : « obtenir un multiple de 5 » n'est réalisé que par l'issue 5.

- Un événement qui est réalisé par **toutes** les issues est **certain** (exemple : « obtenir un nombre inférieur à 7 » avec un dé).
- Un événement qui n'est réalisé par **aucune** issue est **impossible** (exemple : « obtenir 8 » avec un dé).
- Un événement réalisé par une seule issue est un événement **élémentaire**.

3. La probabilité : un nombre entre 0 et 1

Probabilité La **probabilité** d'un événement est un nombre qui mesure ses chances de se réaliser. On note $P(A)$ la probabilité de l'événement A.

Propriétés

- Pour tout événement A : $0 \leq P(A) \leq 1$.
- Un événement impossible a pour probabilité **0**. Un événement certain a pour probabilité **1**.
- La somme des probabilités de toutes les issues d'une expérience est égale à **1**.

Une probabilité s'écrit comme une fraction, un nombre décimal ou un pourcentage. Par exemple, $\frac{1}{4} = 0,25 = 25\%$.

0	entre 0 et 0,5	0,5	entre 0,5 et 1	1
impossible	peu probable	une chance sur deux	très probable	certain

Piège Une probabilité n'est **jamais négative** et **jamais plus grande que 1**. Si tu trouves $\frac{5}{4}$ ou $-0,2$, c'est qu'il y a une erreur quelque part !

4. Quand toutes les issues ont autant de chances : l'équiprobabilité

Équiprobabilité Les issues d'une expérience sont **équiprobables** lorsqu'elles ont toutes la même probabilité (dé non truqué, pièce équilibrée, boules identiques tirées sans regarder...).

Propriété Si les issues sont équiprobables, la probabilité d'un événement A est

$$P(A) = (\text{nombre d'issues qui réalisent A}) \div (\text{nombre total d'issues})$$

Face obtenue	1	2	3	4	5	6
Probabilité	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

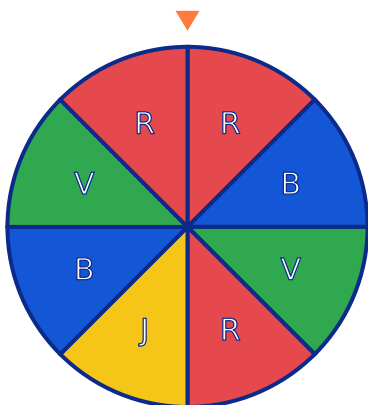
Pour un dé équilibré, chaque face a la probabilité **1/6**, et $6 \times 1/6 = 1$.

Méthode

1. Vérifier que les issues sont bien équiprobables.
2. Compter le nombre total d'issues.
3. Compter les issues qui réalisent l'événement.
4. Écrire la fraction, puis la simplifier si possible.

Exemple résolu Une roue est partagée en 8 secteurs identiques : 3 rouges, 2 bleus, 2 verts et 1 jaune. On la fait tourner et on regarde la couleur sous la flèche.

Il y a 8 issues équiprobables. $P(\text{rouge}) = 3/8$; $P(\text{bleu}) = 2/8 = 1/4$; $P(\text{« rouge ou jaune »}) = 4/8 = 1/2$.



Piège classique Deux issues possibles ne sont pas forcément équiprobables ! Avec 3 boules rouges et 1 bleue, « rouge » et « bleue » sont deux issues, mais elles n'ont pas la même probabilité : $P(\text{rouge}) = 3/4$ et $P(\text{bleue}) = 1/4$. Il ne faut donc pas dire « une chance sur deux ».

5. L'événement contraire

Événement contraire Le **contraire** d'un événement A, noté $\bar{A}$, est l'événement réalisé par toutes les issues qui ne réalisent **pas** A.

Propriété $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$. En effet, A et $\bar{A}$ se partagent toutes les issues, donc $P(A) + P(\bar{A}) = 1$.

Exemple On lance un dé. A : « obtenir 6 ». Le contraire $\bar{A}$ est « ne pas obtenir 6 », donc « obtenir 1, 2, 3, 4 ou 5 ». $P(A) = 1/6$ donc $P(\bar{A}) = 1 - 1/6 = 5/6$.

Astuce Quand l'énoncé dit « au moins un... » ou « ne pas... », pense à passer par le contraire : c'est souvent bien plus court.

Attention au vrai contraire Le contraire de « obtenir un nombre pair » est « obtenir un nombre impair ». Le contraire de « obtenir un nombre supérieur ou égal à 5 » est « obtenir un nombre strictement inférieur à 5 », c'est-à-dire 1, 2, 3 ou 4.

6. Fréquences et probabilité

Fréquence Si on répète n fois une expérience et que l'événement A se réalise k fois, la **fréquence** de A est k/n .

La fréquence change d'une série à l'autre : c'est le hasard. Mais quand le nombre de répétitions devient très grand, elle se **stabilise** autour d'un nombre : c'est la probabilité de l'événement.

À savoir Plus on répète l'expérience, plus la fréquence d'un événement se rapproche de sa probabilité. Quand on ne peut pas calculer la probabilité (objet déformé, pièce truquée, drapeau qui tombe d'un côté ou de l'autre...), on **estime** la probabilité par la fréquence observée sur un très grand nombre d'essais.

Exemple On lance un bouchon de bouteille et on note s'il tombe sur le côté plat. Résultats :

Nombre de lancers	20	100	1 000
Nombre de « côté plat »	13	68	672
Fréquence	0,65	0,68	0,672

On peut estimer que la probabilité de tomber sur le côté plat est d'environ 0,67.

Ne pas confondre Une probabilité de 0,5 ne veut pas dire que, sur 10 lancers, on aura exactement 5 piles. Cela veut dire que, sur un très grand nombre de lancers, la fréquence de « pile » sera proche de 0,5. Et le hasard n'a pas de mémoire : après 5 « face » de suite, la probabilité de « pile » au lancer suivant reste **1/2**.

7. Simuler une expérience

Simuler une expérience, c'est la reproduire grâce à un outil qui donne des nombres au hasard : une table de chiffres aléatoires, une calculatrice ou un tableur. On répète la simulation de nombreuses fois pour obtenir une fréquence.

Méthode

1. Choisir un tirage au hasard (par exemple un chiffre de 0 à 9).
2. Associer à chaque événement une part des chiffres, en respectant la probabilité.
3. Répéter le tirage un grand nombre de fois et noter les résultats.
4. Calculer la fréquence de l'événement.

Exemple On veut simuler un tirage dans un sac où $P(\text{rouge}) = 0,4$. On tire des chiffres de 0 à 9 : les chiffres 0, 1, 2, 3 signifient « rouge » (4 chiffres sur 10), les chiffres 4 à 9 signifient « pas rouge ».

Sur un tableur, la formule `=ALEA.ENTRE.BORNES(0;9)` donne un chiffre au hasard. Pour simuler un dé, on écrit `=ALEA.ENTRE.BORNES(1;6)`.

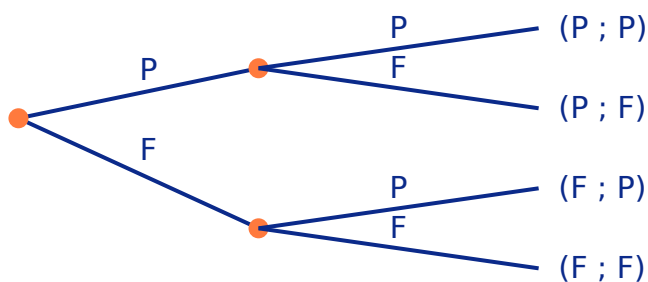
Mathbot dit Si tu relances une simulation, tu obtiens d'autres résultats. C'est normal : le hasard ne se répète pas ! Ce qui reste presque pareil, c'est la fréquence quand tu fais beaucoup d'essais.

8. Expériences à deux étapes : l'arbre des issues

Quand une expérience se fait en deux étapes (deux lancers, une pièce puis un dé...), un **arbre** permet de ne rien oublier. Chaque chemin de l'arbre est une issue.

Exemple On lance deux fois une pièce équilibrée. Les issues sont (P ; P), (P ; F), (F ; P) et (F ; F) : il y en a 4, équiprobables.

$P(\text{« deux fois pile »}) = \mathbf{1/4}$; $P(\text{« exactement un pile »}) = \mathbf{2/4 = 1/2}$; $P(\text{« au moins un pile »}) = 1 - \mathbf{1/4 = 3/4}$.



Chaque chemin de l'arbre (de la racine jusqu'au bout) est une issue.

Astuce Si la première étape a a issues et la seconde b issues, l'expérience complète a $a \times b$ issues. Avec une pièce puis un dé : $2 \times 6 = 12$ issues.

À retenir

- Une expérience aléatoire a des issues connues à l'avance, mais un résultat imprévisible.
- Un événement est formé d'issues ; il peut être certain (probabilité 1) ou impossible (probabilité 0).
- Pour tout événement : $0 \leq P(A) \leq 1$; la somme des probabilités des issues vaut 1.
- Si les issues sont équiprobables : $P(A) = \text{nombre d'issues favorables} \div \text{nombre d'issues possibles}$.
- Événement contraire : $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.
- La fréquence d'un événement se rapproche de sa probabilité quand on répète très souvent l'expérience.
- On peut simuler une expérience avec des chiffres aléatoires ou un tableur.
- Pour une expérience à deux étapes, on dresse un arbre ou un tableau pour lister toutes les issues.