

Probabilités et échantillonnage

Corrigé des exercices - 2de

Corrigé détaillé des exercices du chapitre. Vérifie tes réponses étape par étape et corrige-toi.

1 Dé à 8 faces ★★★

Il y a 8 issues équiprobables, donc $p(\text{événement}) = \text{nombre d'issues favorables} \div 8$.

- a. $A = \{4 ; 8\}$: 2 issues. $p(A) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.
- b. $B = \{6 ; 7 ; 8\}$: 3 issues. $p(B) = \frac{3}{8}$.
- c. $C = \{2 ; 3 ; 5 ; 7\}$ (1 n'est pas premier) : 4 issues. $p(C) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.

2 Roue de loterie ★★★

- a. La somme des probabilités vaut 1 : $p(\text{bleu}) = 1 - (0,35 + 0,25 + 0,15) = 1 - 0,75 = 0,25$.
- b. Rouge et bleu sont incompatibles : $p = 0,35 + 0,25 = 0,60$.
- c. « Ne pas obtenir vert » est le contraire de « obtenir vert » : $p = 1 - 0,15 = 0,85$.

3 Vrai ou faux ? ★★★

- a. **Faux.** Une probabilité est toujours comprise entre 0 et 1.
- b. **Faux.** Les issues sont PP, PF, FP, FF (équiprobables). « Un pile et un face » = $\{PF ; FP\}$, soit $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.
- c. **Vrai.** $p(\bar{A}) = 1 - p(A) = 1 - 0,3 = 0,7$.
- d. **Faux.** $A = \{2 ; 4 ; 6\}$, $B = \{1 ; 2 ; 3\}$, $A \cap B = \{2\}$ n'est pas vide. $A \cup B = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6\}$, donc $p(A \cup B) = \frac{5}{6}$. Vérification : $\frac{3}{6} + \frac{3}{6} - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

4 Jeu de 32 cartes ★★★

32 cartes équiprobables.

- a. 4 rois : $p = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$.
- b. 8 cœurs : $p = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$.
- c. 1 seule carte : $p = \frac{1}{32}$.
- d. 3 figures par couleur, donc $3 \times 4 = 12$ figures : $p = \frac{12}{32} = \frac{3}{8}$.

5 Le sac de jetons ★★★

- a. $p(\text{vert}) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.
- b. 7 jetons ne sont pas rouges ($4 + 3$) : $p = \frac{7}{12}$. Autre méthode : $1 - \frac{5}{12} = \frac{7}{12}$.
- c. $5 + 3 = 8$ jetons : $p = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$.

6 Le contraire à la rescousse ★★★

- a. En retard est le contraire de à l'heure : $1 - 0,82 = 0,18$.
- b. $500 \times 0,18 = 90$. On peut s'attendre à environ 90 trains en retard (ce n'est pas une certitude : c'est une estimation).
- c. $1 - \frac{3}{7} = \frac{7}{7} - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}$.

7 Un dé truqué ★★★

- a. $0,1 + 0,1 + 0,2 + 0,2 + 0,15 = 0,75$, donc $p(6) = 1 - 0,75 = 0,25$.
- b. Pair = {2 ; 4 ; 6} : $p = 0,1 + 0,2 + 0,25 = 0,55$.

8 Intersection et réunion avec un dé ★★★

- a. $A = \{1 ; 3 ; 5\}$ et $B = \{4 ; 5 ; 6\}$.
- b. Seul 5 est dans les deux : $A \cap B = \{5\}$. $A \cup B = \{1 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$.
- c. $p(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$; $p(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$; $p(A \cap B) = \frac{1}{6}$; $p(A \cup B) = \frac{5}{6}$.
Vérification : $p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \frac{3}{6} + \frac{3}{6} - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$. La formule est vérifiée.

9 Sportifs de la classe ★★★

Notons F : « fait du football » et K : « fait du basket ». $|F| = 16$, $|K| = 11$, $|F \cap K| = 5$.

- a. Formule de la réunion : $16 + 11 - 5 = 22$ élèves pratiquent au moins un sport.
- b. $p(F \cup K) = \frac{22}{28} = \frac{11}{14}$. Le contraire (aucun sport) : $1 - \frac{11}{14} = \frac{3}{14}$ (soit 6 élèves sur 28).
- c. Basket uniquement : $11 - 5 = 6$ élèves, donc $p = \frac{6}{28} = \frac{3}{14}$.

10 Au cinéma ★★★

- a. Adultes : 140, donc enfants : $240 - 140 = 100$. Film B : $240 - 125 = 115$. Adultes au film B : $140 - 90 = 50$. Enfants au film A : $125 - 90 = 35$. Enfants au film B : $100 - 35 = 65$ (contrôle : $115 - 50 = 65$).

	Film A	Film B	Total
Adultes	90	50	140

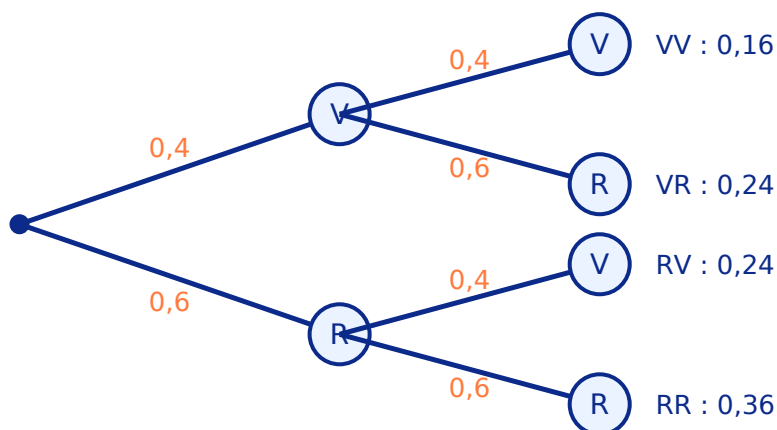
	Film A	Film B	Total
Enfants	35	65	100
Total	125	115	240

b. $p(\text{enfant}) = 100/240 = 5/12$. $p(\text{adulte} \cap A) = 90/240 = 3/8$.

c. $p(E \cup B) = p(E) + p(B) - p(E \cap B) = 100/240 + 115/240 - 65/240 = 150/240 = 5/8$. Vérification : le contraire est « adulte au film A », $90/240$; $1 - 3/8 = 5/8$.

11 Deux tirages avec remise ★★★

a. Chaque tirage : $p(V) = 4/10 = 0,4$ et $p(R) = 0,6$. L'arbre a deux étapes, avec ces mêmes probabilités à chaque étape.



b. $p(VV) = 0,4 \times 0,4 = 0,16$. $p(RR) = 0,6 \times 0,6 = 0,36$.

c. VR ou RV : $0,4 \times 0,6 + 0,6 \times 0,4 = 0,24 + 0,24 = 0,48$. Contrôle : $0,16 + 0,36 + 0,48 = 1$.

12 Somme de deux dés ★★★

a. $6 \times 6 = 36$ issues équiprobables. Tableau des sommes :

1er \ 2e	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

b. La somme 7 apparaît 6 fois (une par ligne) : $p = 6/36 = 1/6$.

c. 10 apparaît 3 fois, 11 deux fois, 12 une fois : 6 cases. $p = 6/36 = 1/6$.

d. On compte 18 sommes paires : $p = 18/36 = 1/2$.

13 Une pièce équilibrée ★★★

- a. $n = 50 \geq 25$ et $p = 0,5$ est dans $[0,2 ; 0,8]$: les conditions sont remplies.
- b. $1/\sqrt{50} \approx 0,1414$. Bornes : $0,5 - 0,1414 \approx 0,359$ et $0,5 + 0,1414 \approx 0,641$.
Intervalle : $[0,359 ; 0,641]$.
- c. $f = 29/50 = 0,58$. Comme $0,359 \leq 0,58 \leq 0,641$, la fréquence est dans l'intervalle : elle est **compatible** avec une pièce équilibrée.

14 Boules rouges à 30 % ★★★

$p = 0,3$ et $n = 100$ (conditions vérifiées). $1/\sqrt{100} = 0,1$, donc l'intervalle de fluctuation est $[0,2 ; 0,4]$.

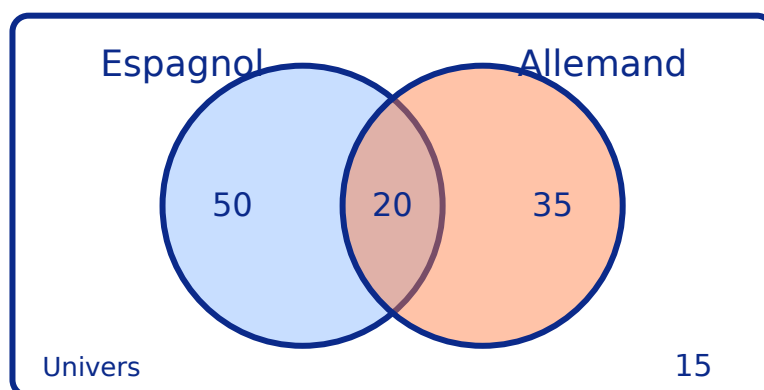
La fréquence observée est $f = 41/100 = 0,41$. Comme $0,41 > 0,4$, elle est **en dehors** de l'intervalle. Ce résultat est inhabituel : on peut douter de l'affirmation « 30 % de boules rouges » (avec un risque d'environ 5 % de se tromper, car le hasard peut parfois produire un tel échantillon).

15 Fréquences et probabilités ★★★

- a. $f = 118/200 = 0,59$.
- b. $n = 200$, $p = 0,5$. $1/\sqrt{200} \approx 0,0707$. Intervalle : $[0,429 ; 0,571]$. Comme $0,59 > 0,571$, la fréquence est en dehors : on peut douter de l'affirmation de Léa (la probabilité n'est sans doute pas 0,5).

16 Les langues en 2de ★★★

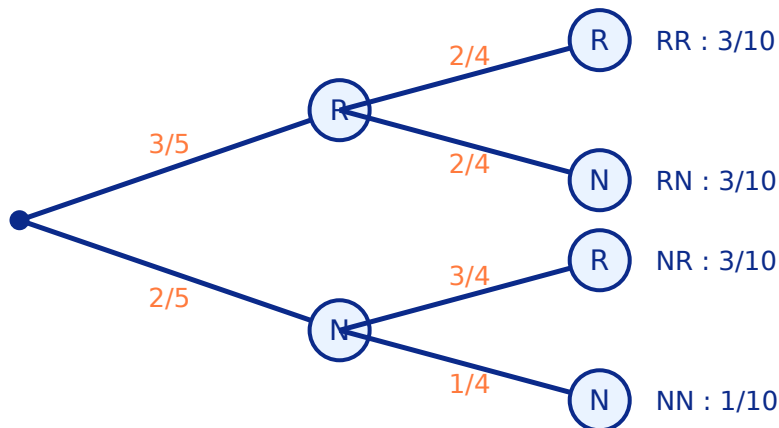
- a. Au moins une langue : $120 - 15 = 105$ élèves. Par la formule : $105 = 70 + 55 - x$, donc $x = 125 - 105 = 20$ élèves apprennent les deux.
- b. Espagnol seulement : $70 - 20 = 50$; allemand seulement : $55 - 20 = 35$; les deux : 20 ; aucune : 15 ($50 + 20 + 35 + 15 = 120$).



- c. $p = 50/120 = 5/12$.
- d. Exactement une : $50 + 35 = 85$. $p = 85/120 = 17/24$.

17 Tirages sans remise ★★★

- a. Premier tirage : $p(R) = \frac{3}{5}$, $p(N) = \frac{2}{5}$. Si la première est rouge, il reste 2 rouges et 2 noires sur 4 boules : $p(R) = \frac{2}{4}$, $p(N) = \frac{2}{4}$. Si la première est noire, il reste 3 rouges et 1 noire : $p(R) = \frac{3}{4}$, $p(N) = \frac{1}{4}$.



- b. $p(RR) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$.
c. Même couleur : RR ou NN. $p(NN) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$. Total : $\frac{3}{10} + \frac{1}{10} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$.
d. $p(RN) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$; $p(NR) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$. Somme : $\frac{3}{10} + \frac{3}{10} + \frac{3}{10} + \frac{1}{10} = \frac{10}{10} = 1$.

18 Au moins un pile, au moins un six ★★★

- a. Le contraire de « au moins un pile » est « aucun pile », c'est-à-dire FFF. Il y a $2 \times 2 \times 2 = 8$ issues équiprobables, donc $p(FFF) = \frac{1}{8}$. Ainsi $p(\text{au moins un pile}) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$.
b. À chaque lancer, $p(\text{pas de 6}) = \frac{5}{6}$. Aucun 6 en 4 lancers : $\frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{625}{1296}$. Donc $p(\text{au moins un 6}) = 1 - \frac{625}{1296} = \frac{671}{1296} \approx 0,518$.

19 Clients de la boulangerie ★★★

- a. $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$, donc $p(A \cap B) = 0,5 + 0,4 - 0,7 = 0,2$.
b. Pain sans viennoiserie : $p(A) - p(A \cap B) = 0,5 - 0,2 = 0,3$.
c. C'est le contraire de $A \cup B$: $1 - 0,7 = 0,3$.
d. Non : $p(A \cap B) = 0,2 \neq 0$, donc des clients achètent les deux.

20 Lire un programme Python ★★★

- a. Il répète n fois un événement de probabilité 0,3 (`random()` est inférieur à 0,3 avec une probabilité de 0,3) et compte les réussites.
b. Il renvoie la fréquence de réussites dans un échantillon de taille 400 : un nombre proche de 0,3, mais qui change à chaque exécution.
c. $p = 0,3$, $n = 400$. $\frac{1}{\sqrt{400}} = \frac{1}{20} = 0,05$. Intervalle : $[0,25 ; 0,35]$.

- d. $0,36 > 0,35$: la fréquence est en dehors de l'intervalle. C'est un résultat rare (moins de 5 % des cas environ) ; si on soupçonne que la probabilité n'est pas 0,3, on peut la remettre en cause.
- e. Remplacer 0.3 par 0.6 dans la condition **random() < 0.6**.

21 Vingt échantillons simulés ★★★

- a. $n = 100$, $p = 0,3$: $1/\sqrt{100} = 0,1$. Intervalle : $[0,2 ; 0,4]$.
- b. Une fréquence est en dehors si le nombre est inférieur à 20 ou supérieur à 40. Ici, on en compte **1** sur 20.
- c. 95 % de 20 échantillons correspond à 19 échantillons dans l'intervalle, soit environ 1 en dehors. Le comptage observé est tout à fait cohérent avec cette propriété (elle annonce « au moins 95 % » en théorie, et sur un petit nombre d'échantillons le résultat peut varier un peu).

22 Un dé est-il équilibré ? ★★★

- a. $f = 93/150 = 0,62$.
- b. $1/\sqrt{150} \approx 0,0816$. Intervalle : $[0,5 - 0,0816 ; 0,5 + 0,0816] \approx [0,418 ; 0,582]$.
- c. $0,62 > 0,582$: f est en dehors de l'intervalle. On remet en cause l'hypothèse « le dé est équilibré ». Le risque d'erreur est d'environ 5 % : un dé équilibré pourrait, très rarement, donner un tel échantillon.

23 Quelle taille d'échantillon ? ★★★

- a. Les bornes sont $p - 1/\sqrt{n}$ et $p + 1/\sqrt{n}$: amplitude = $2/\sqrt{n}$.
- b. $n = 25$: $2/5 = 0,4$. $n = 100$: $2/10 = 0,2$. $n = 400$: $2/20 = 0,1$.
- c. On veut $2/\sqrt{n} \leq 0,1$, soit $\sqrt{n} \geq 20$, donc $n \geq 400$. Il faut au moins 400 individus. Pour diviser l'amplitude par 2, il faut multiplier la taille de l'échantillon par 4 : plus l'échantillon est grand, plus la fréquence est précise.