

Produit scalaire

Corrigé des exercices - 1ère

Corrigé détaillé des exercices du chapitre. Vérifie tes réponses étape par étape et corrige-toi.

1 Produit scalaire en coordonnées ★★★

On applique $\vec{u} \cdot \vec{v} = x x' + y y'$.

- a. $3 \times 4 + (-2) \times 5 = 12 - 10 = \mathbf{2}$.
- b. $(-1) \times 2 + 6 \times 3 = -2 + 18 = \mathbf{16}$.
- c. $0 \times 5 + 7 \times (-1) = \mathbf{-7}$.
- d. $2 \times (-3) + (-4) \times 1,5 = -6 - 6 = \mathbf{-12}$.

2 Avec la norme et l'angle ★★★

On utilise $\vec{u} \cdot \vec{v} = 5 \times 4 \times \cos \theta = 20 \cos \theta$.

- a. $20 \times \mathbf{1/2} = \mathbf{10}$.
- b. $\cos 90^\circ = 0$ donc $\mathbf{0}$: les vecteurs sont orthogonaux.
- c. $\cos 120^\circ = \mathbf{-1/2}$ donc $\mathbf{-10}$.
- d. $\cos 0^\circ = 1$ donc $\mathbf{20}$ (vecteurs colinéaires de même sens).
- e. $\cos 180^\circ = -1$ donc $\mathbf{-20}$ (sens contraires).
- f. $20 \times \sqrt{2}/2 = \mathbf{10\sqrt{2}} \approx 14,14$.

3 Dans un carré ★★★

- a. Le projeté orthogonal de C sur (AB) est B, et $\vec{AB}$ est de même sens que $\vec{AB}$. Donc $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AB = 36$.
- b. $(AB) \perp (AD)$, donc le produit scalaire vaut $\mathbf{0}$.
- c. $\vec{CD} = -\vec{AB}$, donc $\vec{AB} \cdot \vec{CD} = -AB^2 = \mathbf{-36}$.
- d. Les diagonales d'un carré sont perpendiculaires, donc $\vec{AC} \cdot \vec{BD} = \mathbf{0}$. (Contrôle avec $A(0 ; 0)$, $B(6 ; 0)$, $D(0 ; 6)$, $C(6 ; 6)$: $\vec{AC}(6 ; 6)$ et $\vec{BD}(-6 ; 6)$, $6 \times (-6) + 6 \times 6 = 0$ ✓.)

4 Vrai ou faux ? ★★★

- a. **Faux.** Le produit est aussi nul si les vecteurs sont orthogonaux : $(1 ; 0) \cdot (0 ; 1) = 0$.

- b. **Vrai** : c'est la symétrie du produit scalaire.
- c. **Vrai** : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta$, avec des normes strictement positives ; donc $\cos \theta > 0$ et θ est aigu.
- d. **Faux** en général : seulement si les vecteurs sont colinéaires de même sens.
Contre-exemple : (1 ; 0) et (0 ; 1) donnent $\sqrt{2}$ et non 2.
- e. **Vrai** : angle nul, $\cos 0^\circ = 1$.

5 Orthogonaux ou non ? ★★★

On calcule le produit scalaire : il doit valoir 0.

- a. $2 \times 6 + (-3) \times 4 = 12 - 12 = 0$: **oui**.
- b. $5 \times (-1) + 1 \times 5 = 0$: **oui**.
- c. $4 \times 3 + 3 \times 4 = 24 \neq 0$: **non**.
- d. $0 \times 5 + 3 \times 0 = 0$: **oui** (un vecteur vertical et un vecteur horizontal).

6 Trouver un paramètre ★★★

- a. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 4m - 6$. On résout $4m - 6 = 0$, d'où $m = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$.
- b. $\vec{u} \cdot \vec{v} = m^2 - 4 = 0$, donc $m = 2$ ou $m = -2$. Les deux valeurs conviennent : **m = -2 ou m = 2**.

7 Règles de calcul ★★★

- a. $\|\vec{u}\|^2 + 2 \vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 = 9 - 8 + 25 = \mathbf{26}$.
- b. $9 - 2 \times (-4) + 25 = 9 + 8 + 25 = \mathbf{42}$.
- c. On développe : $2\vec{u} \cdot \vec{u} - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} - \vec{v} \cdot \vec{v} = 2 \times 9 - 2 \times (-4) + (-4) - 25 = 18 + 8 - 4 - 25 = \mathbf{-3}$.

8 Angle d'un triangle ★★★

$\vec{BA}(-4 ; -1)$ et $\vec{BC}(-2 ; 3)$.

$$\vec{BA} \cdot \vec{BC} = (-4)(-2) + (-1)(3) = 8 - 3 = 5.$$

$$\|\vec{BA}\| = \sqrt{17} \text{ et } \|\vec{BC}\| = \sqrt{13}, \text{ donc } \cos ABC = \frac{5}{\sqrt{221}} \approx 0,34.$$

L'angle ABC mesure donc environ **70,3°**.

9 Un triangle rectangle ? ★★★

- a. $\vec{AB}(4 ; 2)$ et $\vec{AC}(-1 ; 2)$: $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = -4 + 4 = 0$. Donc $(AB) \perp (AC)$: ABC est rectangle en A.

- b. $AB = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ et $AC = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$. Aire = $\frac{1}{2} \times 2\sqrt{5} \times \sqrt{5} = 5$ unités d'aire.
- c. Le centre est le milieu de l'hypoténuse [BC] : $(-\frac{1}{2} ; \frac{6}{2})$ soit $(-0,5 ; 3)$. $BC = 5$ (même ordonnée, abscisses 2 et -3), donc le rayon est **2,5**. Contrôle : $BC^2 = 25 = AB^2 + AC^2 = 20 + 5$ ✓.

10 Al-Kashi : une longueur ★★★

On applique $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos \hat{A}$.

- a. $BC^2 = 49 + 25 - 2 \times 7 \times 5 \times \frac{1}{2} = 74 - 35 = 39$. $BC = \sqrt{39} \approx 6,24$.
- b. $\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$, donc $BC^2 = 16 + 36 + 2 \times 4 \times 6 \times \frac{1}{2} = 52 + 24 = 76$. $BC = \sqrt{76} = 2\sqrt{19} \approx 8,72$.

11 Al-Kashi : les angles ★★★

Notons $a = 5$, $b = 6$, $c = 7$ (a opposé à $\hat{A}$, etc.).

$$\cos \hat{A} = (b^2 + c^2 - a^2) / (2bc) = (36 + 49 - 25) / 84 = \frac{5}{7}, \text{ donc } \hat{A} \approx 44,4^\circ.$$

$$\cos \hat{B} = (a^2 + c^2 - b^2) / (2ac) = (25 + 49 - 36) / 70 = \frac{19}{35}, \text{ donc } \hat{B} \approx 57,1^\circ.$$

$$\hat{C} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{B} \approx 78,5^\circ. \text{ Contrôle : } \cos \hat{C} = (25 + 36 - 49) / 60 = \frac{1}{5}, \text{ et } \cos^{-1}(0,2) \approx 78,5^\circ \checkmark.$$

12 Théorème de la médiane ★★★

Première partie. $MA^2 + MB^2 = 2 MI^2 + \frac{AB^2}{2}$, soit $25 + 49 = 2 MI^2 + 32$. Donc $2 MI^2 = 74 - 32 = 42$, $MI^2 = 21$ et $MI = \sqrt{21} \approx 4,58$.

Seconde partie. Soit I le milieu de [BC], $BI = 5$. $AB^2 + AC^2 = 2 AI^2 + \frac{BC^2}{2}$ donne $49 + 81 = 2 AI^2 + 50$, donc $AI^2 = 40$ et $AI = 2\sqrt{10} \approx 6,32$.

13 Produit scalaire avec les trois côtés ★★★

- a. $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{1}{2} (AB^2 + AC^2 - BC^2) = \frac{1}{2} (25 + 64 - 49) = \frac{40}{2} = 20$.
- b. $\cos \hat{A} = 20 / (5 \times 8) = \frac{20}{40} = \frac{1}{2}$, donc $\hat{A} = 60^\circ$.

14 Équation à partir d'un vecteur normal ★★★

$$M(x ; y) \in d \Leftrightarrow \vec{AM} \cdot \vec{n} = 0 \text{ avec } \vec{AM}(x - 2 ; y + 1).$$

$$3(x - 2) + 4(y + 1) = 0 \Leftrightarrow 3x - 6 + 4y + 4 = 0 \Leftrightarrow \mathbf{3x + 4y - 2 = 0}. \text{ Contrôle avec } A : 6$$

$$-4 - 2 = 0 \checkmark.$$

Pour $B(-2 ; 1) : 3 \times (-2) + 4 \times 1 - 2 = -6 + 4 - 2 = -4 \neq 0$. B **n'appartient pas** à d.

15 Droite perpendiculaire ★★★

Un vecteur normal à d est $(2 ; -5)$. Il est un vecteur directeur de la perpendiculaire, donc un vecteur normal de celle-ci est $(5 ; 2)$ (car $5 \times 2 + 2 \times (-5) = 0$).

Équation : $5x + 2y + c = 0$. Comme B est sur la droite : $15 + 8 + c = 0$, donc $c = -23$.

La perpendiculaire a pour équation **$5x + 2y - 23 = 0$** .

16 Équation d'un cercle ★★★

a. **$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$.**

b. $x^2 - 4x + 4 + y^2 + 6y + 9 = 16$, soit **$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$** .

c. A : $(2 - 2)^2 + (1 + 3)^2 = 0 + 16 = 16 \checkmark$, $A \in (C)$. B : $(5 - 2)^2 + (0 + 3)^2 = 9 + 9 = 18 \neq 16$, $B \notin (C)$.

17 Reconnaître un cercle ★★★

a. $(x - 3)^2 - 9 + (y + 1)^2 - 1 - 6 = 0$, donc $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 16$: **cercle de centre $(3 ; -1)$ et de rayon 4**.

b. $(x + 2)^2 - 4 + y^2 + 10 = 0$, donc $(x + 2)^2 + y^2 = -6$: impossible, l'ensemble est **vide**.

c. $(x - 1)^2 - 1 + (y + 2)^2 - 4 + 5 = 0$, donc $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 0$: **le seul point $(1 ; -2)$** , pas un cercle.

18 Cercle de diamètre [AB] ★★★

a. M(x ; y) : MÀ(-1 - x ; 2 - y), M̂B(5 - x ; -2 - y). Le produit vaut $(-1 - x)(5 - x) + (2 - y)(-2 - y) = x^2 - 4x - 5 + y^2 - 4$ (car $(2 - y)(-2 - y) = y^2 - 4$). Équation : **$x^2 + y^2 - 4x - 9 = 0$** .

b. $(x - 2)^2 + y^2 = 13$: centre le milieu de [AB], **$(2 ; 0)$** , rayon $\sqrt{13}$. Contrôle : $AB^2 = 36 + 16 = 52$ et $52/4 = 13 \checkmark$.

c. C : $16 + 4 - 16 - 9 = -5 \neq 0$: C **n'est pas** sur le cercle.

19 Tangente à un cercle ★★★

$$\Omega A^2 = (4 - 1)^2 + (6 - 2)^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2 : A \text{ appartient à } (C).$$

La tangente en A est perpendiculaire au rayon $[\Omega A]$. Donc $\Omega \hat{A}(3 ; 4)$ est un vecteur

normal. $M(x ; y)$ est sur la tangente $\Leftrightarrow \vec{AM} \cdot \vec{\Omega A} = 0 \Leftrightarrow 3(x - 4) + 4(y - 6) = 0$.

Équation : $3x + 4y - 36 = 0$. Contrôle avec A : $12 + 24 - 36 = 0$ ✓.

20 Droite et cercle : intersection ★★★

On remplace y par $x + 1$: $x^2 + (x + 1)^2 = 25 \Leftrightarrow 2x^2 + 2x - 24 = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 12 = 0$.

$\Delta = 1 + 48 = 49$, donc $x = -1 - 7/2 = -4$ ou $x = -1 + 7/2 = 3$.

Pour $x = -4$, $y = -3$; pour $x = 3$, $y = 4$. Les points d'intersection sont **(-4 ; -3) et (3 ; 4)**. Contrôle : $16 + 9 = 25$ ✓ et $9 + 16 = 25$ ✓.

21 Orthocentre ★★★

Hauteur issue de C : perpendiculaire à (AB), qui est l'axe des abscisses ; c'est la droite **$x = 2$** .

Hauteur issue de A : $\vec{BC}(-4 ; 4)$ est un vecteur normal, d'où $-4x + 4y = 0$, soit **$y = x$** .

Le point commun vérifie $x = 2$ et $y = x$: **H(2 ; 2)**.

Hauteur issue de B : $\vec{AC}(2 ; 4)$ est normal, donc $2(x - 6) + 4(y - 0) = 0$. Pour H : $2 \times (-4) + 4 \times 2 = -8 + 8 = 0$ ✓. Les trois hauteurs sont bien concourantes en H.

22 Lignes de niveau ★★★

- $MA^2 = x^2 + y^2$ et $MB^2 = (x - 4)^2 + y^2$. La différence vaut $x^2 + y^2 - (x^2 - 8x + 16 + y^2) = 8x - 16$. On résout $8x - 16 = 8$, d'où $x = 3$. C'est la **droite verticale $x = 3$** (perpendiculaire à (AB)).
- $\vec{MA}(-2 - x ; -y)$ et $\vec{MB}(2 - x ; -y)$. Produit : $(-2 - x)(2 - x) + y^2 = x^2 - 4 + y^2$.
Donc $x^2 + y^2 - 4 = 5$, soit $x^2 + y^2 = 9$: le **cercle de centre O(0 ; 0) et de rayon 3**.

23 Travail d'une force ★★★

$W = \|\vec{F}\| \times AB \times \cos \theta = 120 \times 15 \times \cos \theta = 1800 \cos \theta$.

- $1800 \times \cos 30^\circ = 1800 \times \sqrt{3}/2 = 900\sqrt{3} \approx$ **1 558,8 J**.
- $1800 \times \cos 120^\circ = 1800 \times (-1/2) =$ **-900 J** : un travail résistant.
- $\cos 90^\circ = 0$, donc **W = 0 J** : la force ne travaille pas.

24 Loi du parallélogramme ★★★

- a. On a $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD}$ et $\vec{BD} = \vec{AD} - \vec{AB}$. Donc $AC^2 = AB^2 + 2 \vec{AB} \cdot \vec{AD} + AD^2$ et $BD^2 = AD^2 - 2 \vec{AB} \cdot \vec{AD} + AB^2$. En additionnant, les produits scalaires s'annulent : $AC^2 + BD^2 = 2 AB^2 + 2 AD^2$.
- b. $100 + BD^2 = 2 (49 + 25) = 148$, d'où $BD^2 = 48$ et $BD = 4\sqrt{3} \approx \mathbf{6,93}$.