

Produit scalaire

Cours de maths - 1ère

Le **produit scalaire** est un outil à deux vecteurs qui donne un **nombre**. Il permet de calculer des angles et des longueurs, de reconnaître des droites perpendiculaires et d'écrire des équations de droites et de cercles. Après ce chapitre, tu sauras le calculer de plusieurs façons et choisir la plus efficace selon les données de l'énoncé. Mathbot t'accompagne pas à pas !

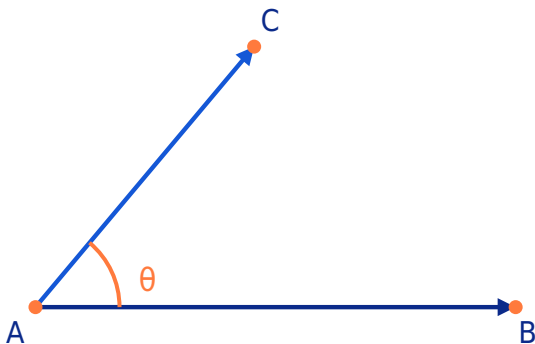
1. Rappels : vecteurs, norme, angle

Dans un repère orthonormé $(O ; I, J)$, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x_B - x_A ; y_B - y_A)$. Sa **norme**, notée $\|\overrightarrow{AB}\|$, est la longueur AB .

Norme en coordonnées

Dans un repère orthonormé, si $\vec{u}$ a pour coordonnées $(x ; y)$, alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ de même origine A forment un angle géométrique noté **BAC**, compris entre 0° et 180° . Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls, leur angle est celui que forment deux représentants de même origine.



Exemple

Pour $\vec{u}(3 ; -4)$, on a $\|\vec{u}\| = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$.

2. Définition du produit scalaire

Produit scalaire (norme et angle)

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. Le **produit scalaire** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$, est le nombre réel

Fiche en ligne : maths-facile.eu/produit-scalaire-cours-1ere/ · Cours, exercices et contrôles corrigés sur [maths-](https://maths-facile.eu)

:

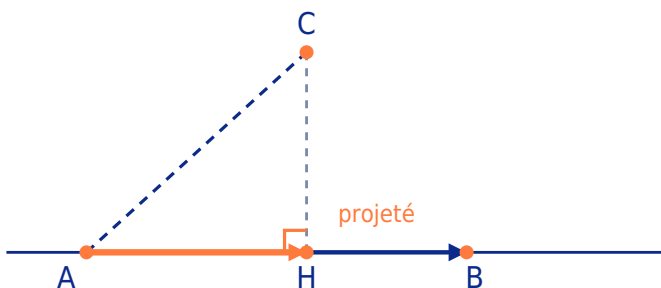
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos \theta$$

où θ est l'angle formé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Si l'un des deux vecteurs est nul, le produit scalaire est égal à 0.

Le résultat est un **nombre**, pas un vecteur. Son signe dépend de l'angle : positif si l'angle est aigu, négatif s'il est obtus, nul s'il est droit.

Projeté orthogonal

Le **projeté orthogonal** d'un point C sur une droite (AB) est le point H de (AB) tel que (CH) est perpendiculaire à (AB).



Définition par projection

Soit A, B, C trois points avec $A \neq B$, et H le projeté orthogonal de C sur (AB). Alors :

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AB} \cdot \vec{AH}$$

- si $\vec{AH}$ et $\vec{AB}$ ont le **même sens** : $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AB} \times \vec{AH}$;
- s'ils sont de **sens contraires** : $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = - \vec{AB} \times \vec{AH}$.

Justification. Dans le triangle AHC rectangle en H, $AH = AC \times |\cos \theta|$; le signe de $\cos \theta$ indique si H est « devant » ou « derrière » A sur la droite (AB). On retrouve bien $\vec{AB} \times \vec{AC} \times \cos \theta$.

Exemple 1

On a $AB = 5$ cm et le projeté H de C sur (AB) vérifie $AH = 3$ cm, avec H du même côté que B. Alors $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 5 \times 3 = \mathbf{15}$. Si H était de l'autre côté de A, on aurait -15 .

Exemple 2

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ avec $\|\vec{u}\| = 6$, $\|\vec{v}\| = 4$ et un angle de 60° . Alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 6 \times 4 \times \cos 60^\circ = 24 \times \frac{1}{2} = 12$.

Cas des vecteurs colinéaires

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de **même sens**, $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$; de **sens contraires**, $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$. En particulier $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$, que l'on note aussi u^2 .

3. Produit scalaire en coordonnées

Expression analytique

Dans un repère **orthonormé**, si $\vec{u}(x ; y)$ et $\vec{v}(x' ; y')$, alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x x' + y y'$$

Démonstration. On utilise l'identité $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$ démontrée en partie 4. Comme $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $(x + x' ; y + y')$, on obtient $\frac{1}{2}((x + x')^2 + (y + y')^2 - x^2 - y^2 - x'^2 - y'^2) = \frac{1}{2}(2xx' + 2yy') = xx' + yy'$.

Exemple

$$\vec{u}(3 ; 1) \text{ et } \vec{v}(-2 ; 5) : \vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \times (-2) + 1 \times 5 = -6 + 5 = -1.$$

Méthode : calculer un angle avec les coordonnées

1. Calcule $\vec{u} \cdot \vec{v}$ avec les coordonnées.
2. Calcule les normes $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$.
3. Déduis $\cos \theta = \vec{u} \cdot \vec{v} / (\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|)$, puis θ avec la touche $\cos^{-1}$ de la calculatrice.

Exemple : $\vec{u}(1 ; 2)$ et $\vec{v}(3 ; -1)$. On a $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 - 2 = 1$, $\|\vec{u}\| = \sqrt{5}$, $\|\vec{v}\| = \sqrt{10}$. Donc $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{50}} \approx 0,14$ et $\theta \approx 81,9^\circ$.

Piège

La formule $x x' + y y'$ n'est valable que dans un repère **orthonormé**. Et ne confonds pas avec le déterminant $x y' - x' y$, qui sert à la colinéarité.

4. Propriétés et règles de calcul

Propriétés

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et tout réel k :

- **symétrie** : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$;
- **bilinéarité** : $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ et $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k (\vec{u} \cdot \vec{v})$;
- $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2 \geq 0$.

Ces règles ressemblent à celles du développement des nombres : on peut développer et factoriser.

Identités remarquables

- $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2 \vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$
- $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2 \vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$
- $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$

Démonstration de la première. $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|^2 + 2 \vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$. La deuxième se démontre de la même façon.

Formules de polarisation

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2) \text{ et } \vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2).$$

En particulier, pour un triangle ABC : $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{1}{2} (\vec{AB}^2 + \vec{AC}^2 - \vec{BC}^2)$, car $\vec{AB} - \vec{AC} = \vec{CB}$.

Exemple

Dans un triangle ABC avec $AB = 5$, $AC = 8$ et $BC = 7$: $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{1}{2} (25 + 64 - 49) = \frac{40}{2} = 20$. Donc $\cos \hat{A} = \frac{20}{40} = \frac{1}{2}$ et l'angle en A mesure 60° .

Astuce

Pour calculer un produit scalaire, choisis la formule selon les données : **coordonnées** $\rightarrow x x' + y y'$; **deux longueurs et un angle** $\rightarrow$ norme et angle ; **les trois côtés** $\rightarrow$ polarisation ; **un projeté orthogonal connu** $\rightarrow$ projection.

5. Orthogonalité

Vecteurs orthogonaux

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. Pour trois points, $(AB) \perp (AC) \Leftrightarrow \vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0$.

C'est une conséquence de la définition : si les deux vecteurs sont non nuls, le produit est nul exactement quand $\cos \theta = 0$, donc $\theta = 90^\circ$. Par convention, le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur.

Exemple

$\vec{u}(4 ; -2)$ et $\vec{v}(1 ; 2)$: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 4 - 4 = 0$, donc ils sont orthogonaux. Dans un repère, un vecteur directeur de la droite d'équation $ax + by + c = 0$ est $(-b ; a)$, et le vecteur $(a ; b)$ lui est orthogonal.

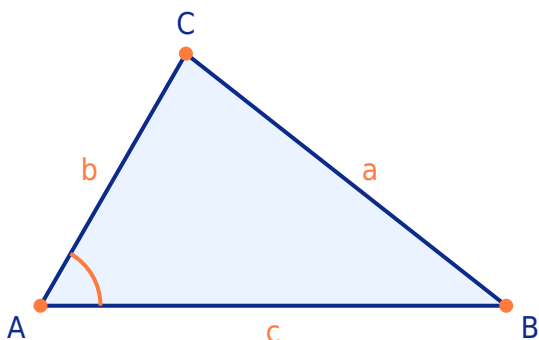
Méthode : prouver qu'un triangle est rectangle

Calcule les coordonnées de deux vecteurs issus du même sommet, puis leur produit scalaire. S'il vaut 0, le triangle est rectangle en ce sommet. Sinon, on teste un autre sommet.

Piège

Un produit scalaire nul ne veut pas dire qu'un vecteur est nul : $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ signifie $\vec{u} = \vec{0}$ **ou** $\vec{v} = \vec{0}$ **ou** $\vec{u} \perp \vec{v}$.

6. Formule d'Al-Kashi



Théorème d'Al-Kashi (loi des cosinus)

Dans un triangle ABC, avec $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 b c \cos \hat{A}$$

De même $b^2 = a^2 + c^2 - 2 a c \cos \hat{B}$ et $c^2 = a^2 + b^2 - 2 a b \cos \hat{C}$.

Démonstration. $BC^2 = \|\vec{AC} - \vec{AB}\|^2 = AC^2 + AB^2 - 2 \vec{AB} \cdot \vec{AC} = b^2 + c^2 - 2 b c \cos \hat{A}$.

Quand $\hat{A} = 90^\circ$, $\cos \hat{A} = 0$: on retrouve le **théorème de Pythagore**. La formule d'Al-Kashi le généralise à tous les triangles.

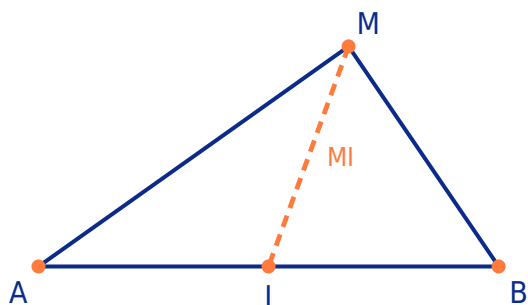
Méthode

- **Longueur manquante** : on connaît deux côtés et l'angle entre eux. Exemple : $AB = 5$, $AC = 8$, $\hat{A} = 40^\circ$. $BC^2 = 25 + 64 - 2 \times 5 \times 8 \times \cos 40^\circ \approx 27,72$, donc $BC \approx 5,26$.
- **Angle** : on connaît les trois côtés. On isole : $\cos \hat{A} = (b^2 + c^2 - a^2) / (2bc)$.

Exemple (trois côtés)

Triangle avec $BC = 5$, $AC = 6$, $AB = 7$. $\cos \hat{A} = (36 + 49 - 25) / (2 \times 6 \times 7) = 60/84 = 5/7$, donc $\hat{A} \approx 44,4^\circ$. $\cos \hat{B} = (25 + 49 - 36) / (2 \times 5 \times 7) = 38/70 = 19/35$, donc $\hat{B} \approx 57,1^\circ$ et $\hat{C} \approx 180 - 44,4 - 57,1 \approx 78,5^\circ$.

7. Théorème de la médiane



Théorème de la médiane

Soit A et B deux points, I le milieu de [AB] et M un point quelconque. Alors :

$$MA^2 + MB^2 = 2 MI^2 + AB^2/2$$

On a aussi $MA^2 - MB^2 = 2 IM \cdot BA$ et $MA \cdot MB = MI^2 - AB^2/4$.

Démonstration. On écrit $\vec{MA} = \vec{MI} + \vec{IA}$ et $\vec{MB} = \vec{MI} + \vec{IB}$ avec $\vec{IB} = -\vec{IA}$. Donc $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = (\vec{MI} + \vec{IA}) \cdot (\vec{MI} - \vec{IA}) = MI^2 - IA^2 = MI^2 - AB^2/4$. En ajoutant $MA^2 + MB^2 = 2 MI^2 + 2 IA^2$ (les termes en $\vec{MI} \cdot \vec{IA}$ s'annulent), on obtient $2 MI^2 + AB^2/2$.

Exemple

$AB = 6$, $MA = 7$, $MB = 5$ et I milieu de [AB]. $MI^2 = (MA^2 + MB^2) / 2 - AB^2/4$, soit $MI^2 = (49 + 25) / 2 - 9 = 37 - 9 = 28$. Donc $MI = \sqrt{28} = 2\sqrt{7} \approx 5,29$. C'est la longueur de la

médiane issue de M dans le triangle MAB.

8. Équation d'une droite et vecteur normal

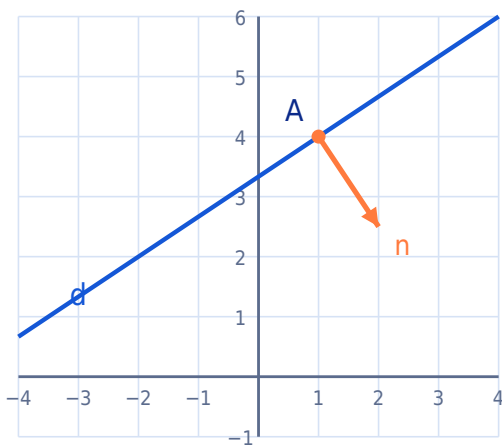
Vecteur normal

Un **vecteur normal** à une droite d est un vecteur non nul orthogonal à un vecteur directeur de d .

Équation cartésienne

Dans un repère orthonormé, la droite passant par A et de vecteur normal $\vec{n}(a ; b)$ est l'ensemble des points M tels que $\vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$. Elle a une équation de la forme $a x + b y + c = 0$. Réciproquement, la droite d'équation $a x + b y + c = 0$ (avec $(a ; b) \neq (0 ; 0)$) a pour vecteur normal $\vec{n}(a ; b)$.

Justification. Si $M(x ; y)$ et $A(x_A ; y_A)$, alors $\vec{AM} \cdot \vec{n} = a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0$, ce qui s'écrit $a x + b y + c = 0$ avec $c = -a x_A - b y_A$.



Méthode

1. Repère un point A de la droite et un vecteur normal $\vec{n}(a ; b)$.
2. Écris $a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0$.
3. Développe et ordonne : $a x + b y + c = 0$.
4. Vérifie avec les coordonnées de A .

Exemple : $A(1 ; 4)$ et $\vec{n}(2 ; -3)$. On a $2(x - 1) - 3(y - 4) = 0$, soit $2x - 3y + 10 = 0$.
Contrôle : $2 - 12 + 10 = 0$ ✓.

Astuce

Deux droites sont **perpendiculaires** si leurs vecteurs normaux sont orthogonaux. Une droite perpendiculaire à $ax + by + c = 0$ a une équation de la forme **$bx - ay + c' = 0$** .

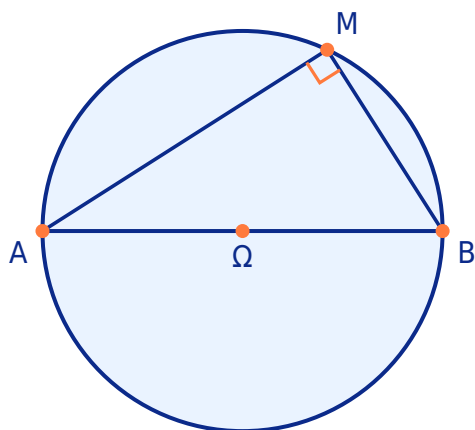
9. Équation d'un cercle

Cercle de centre et de rayon donnés

Le cercle de centre $\Omega(a ; b)$ et de rayon $r > 0$ a pour équation **$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$** .
Développée : $x^2 + y^2 - 2a x - 2b y + (a^2 + b^2 - r^2) = 0$.

Exemple

Centre $\Omega(-1 ; 3)$, rayon 2 : $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 4$, soit $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 6 = 0$ (car $1 + 9 - 4 = 6$).



Cercle de diamètre [AB]

Le cercle de diamètre [AB] est l'ensemble des points M tels que **$\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$** . Son centre est le milieu de [AB] et son rayon est **$AB/2$** .

C'est la propriété du triangle rectangle inscrit dans un demi-cercle, écrite avec le produit scalaire (grâce au théorème de la médiane : $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4} = 0 \Leftrightarrow MI = \frac{AB}{2}$).

Exemple

$A(1 ; 1)$ et $B(5 ; 3)$. $M(x ; y)$ est sur le cercle de diamètre [AB] si $(x - 1)(x - 5) + (y - 1)(y - 3) = 0$, soit $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 8 = 0$. Centre $(3 ; 2)$, rayon $\sqrt{5}$ car $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 5$.

Méthode : reconnaître un cercle

À partir de $x^2 + y^2 + px + qy + s = 0$, on passe à la forme canonique : $(x + \mathbf{p}/2)^2 + (y + \mathbf{q}/2)^2 = \mathbf{p}^2 + \mathbf{q}^2/4 - s$. Si le second membre est strictement positif, c'est un cercle ; s'il est nul, un seul point ; s'il est négatif, l'ensemble est vide.

Méthode : tangente à un cercle

La tangente en un point A du cercle de centre Ω est la droite passant par A et de vecteur normal $\Omega\vec{A}$. Son équation s'écrit $\Omega\vec{A} \cdot \vec{AM} = 0$.

À retenir

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos \theta$; avec un projeté : $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \pm AB \times AH$.
- En repère orthonormé : $\vec{u} \cdot \vec{v} = x x' + y y'$ et $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- Règles : symétrie, bilinéarité, $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$, identités remarquables.
- $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 1/2 (\mathbf{AB}^2 + \mathbf{AC}^2 - \mathbf{BC}^2)$.
- **Orthogonalité** : $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
- **Al-Kashi** : $a^2 = b^2 + c^2 - 2 b c \cos \hat{A}$; il généralise Pythagore.
- **Médiane** : $\mathbf{MA}^2 + \mathbf{MB}^2 = 2 \mathbf{MI}^2 + \mathbf{AB}^2/2$ et $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = \mathbf{MI}^2 - \mathbf{AB}^2/4$.
- **Droite** : vecteur normal (a ; b) $\Rightarrow$ équation $a x + b y + c = 0$.
- **Cercle** : $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$; cercle de diamètre [AB] : $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$.