

Produit scalaire et plans de l'espace

Corrigé du contrôle - Terminale

Durée conseillée : 45 minutes. Barème sur 20 points. Calculatrice interdite.

1 Produit scalaire et orthogonalité / 4 pts

- (1 pt) $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{4 + 1 + 4} = 3$.
- (1 pt) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = 6 - 2 - 4 = 0$, donc $\mathbf{u}$ et $\mathbf{w}$ sont **orthogonaux**.
- (1 pt) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 2 + 2 - 6 = -2$. $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{14}$. $\cos \theta = -2 / (3\sqrt{14}) \approx -0,178$, donc $\theta \approx \mathbf{100,3^\circ}$.
- (1 pt) $2t + 1 + 2 = 0$, donc $t = \mathbf{-3/2}$.

2 Plan par trois points / 3 pts

- (2 pts) $\mathbf{AB}(-1 ; 2 ; -1)$, $\mathbf{AC}(2 ; -1 ; 1)$. Un normal $(a ; b ; c)$ vérifie $-a + 2b - c = 0$ et $2a - b + c = 0$ (0,5 pt). En additionnant : $a + b = 0$; avec $a = 1 : b = -1, c = 2b - a = -3$, soit $\mathbf{n}(1 ; -1 ; -3)$ (0,5 pt). Plan : $x - y - 3z + d = 0$, avec A : $2 - 1 + d = 0, d = -1$ (0,5 pt) : $\mathbf{x - y - 3z - 1 = 0}$. Vérification de B et C (0,5 pt) : $1 - 3 + 3 - 1 = 0 \checkmark$; $4 - 0 - 3 - 1 = 0 \checkmark$.
- (1 pt) D : $3 - 2 - 0 - 1 = 0$: D **appartient** au plan.

3 Positions relatives / 3 pts

- (1 pt) Normaux $(2 ; 1 ; -1)$ et $(1 ; -1 ; 2)$ non colinéaires : P et Q sont **sécants** selon une droite.
- (1,5 pt) On additionne : $3x + z - 3 = 0$, donc $z = 3 - 3x$ (0,5 pt). Avec P : $y = 4 - 2x + z = 7 - 5x$ (0,5 pt). Avec $x = t : (\mathbf{t ; 7 - 5t ; 3 - 3t})$ (0,5 pt). Vérification dans Q : $t - 7 + 5t + 6 - 6t + 1 = 0 \checkmark$.
- (0,5 pt) $z = 0 \Leftrightarrow t = 1$: point $\mathbf{(1 ; 2 ; 0)}$.

4 Distance et projeté orthogonal / 4 pts

- (1,5 pt) $2 \times 1 - (-2) + 2 \times 4 - 3 = 9$; $\sqrt{4 + 1 + 4} = 3$. $d(A, P) = 9/3 = \mathbf{3}$.
- (2 pts) Droite (AH) de direction $\mathbf{n}(2 ; -1 ; 2)$: $x = 1 + 2t, y = -2 - t, z = 4 + 2t$ (0,5 pt). Dans P : $2 + 4t + 2 - t + 8 + 4t - 3 = 9 + 9t = 0, t = -1$ (1 pt). $H = \mathbf{(-1 ; -1 ; 2)}$ (0,5 pt). Contrôle : $-2 + 1 + 4 - 3 = 0 \checkmark$.
- (0,5 pt) H est le milieu de $[AA']$: $A' = 2H - A = \mathbf{(-3 ; 1 ; 0)}$.

5 Tétraèdre et volume / 3 pts

- a. (1 pt) $A : 6 - 6 = 0$; $B : 6 - 6 = 0$; $C : 6 - 6 = 0$. Les trois points non alignés vérifient l'équation (0,5 pt) et le vecteur $(6 ; 3 ; 2)$ est non nul (0,5 pt) : c'est bien le plan (ABC).
- b. (0,5 pt) $d = |-6| / \sqrt{36 + 9 + 4} = \mathbf{6/7}$.
- c. (1,5 pt) Volume (base OAB, hauteur OC) : $\frac{1}{3} \times (\frac{1}{2} \times 1 \times 2) \times 3 = \mathbf{1}$ (0,5 pt). Avec la base ABC : $1 = \frac{1}{3} \times \text{aire} \times 6/7$, donc aire = $3 \times 7/6 = \mathbf{7/2}$ (1 pt).

6 Sphère et plan tangent / 3 pts

- a. (1,5 pt) $d(Q, P) = |2 + 2 + 6 + 2| / \sqrt{1 + 4 + 4} = 12/3 = 4 = \text{rayon}$: P est **tangent** à S.
- b. (1,5 pt) Droite (QH) : $x = 2 + t, y = -1 - 2t, z = 3 + 2t$ (0,5 pt). Dans P : $2 + t + 2 + 4t + 6 + 4t + 2 = 12 + 9t = 0, t = -4/3$ (0,5 pt). $H = \mathbf{(2/3 ; 5/3 ; 1/3)}$ (0,5 pt). Contrôle : $2/3 - 10/3 + 2/3 + 2 = 0$ ✓.