

Produit scalaire et plans de l'espace

Corrigé des exercices - Terminale

Corrigé détaillé des exercices du chapitre. Vérifie tes réponses étape par étape et corrige-toi.

1 Produits scalaires en coordonnées ★★★

- $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 2 \times 4 + (-1) \times 5 + 3 \times (-1) = 8 - 5 - 3 = 0$. Le produit scalaire est nul : $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ sont **orthogonaux**.
- $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{4 + 1 + 9} = \sqrt{14}$ et $\|\mathbf{w}\| = \sqrt{1 + 4 + 4} = 3$.
- $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = 2 \times 1 + (-1) \times (-2) + 3 \times 2 = 2 + 2 + 6 = 10$. Alors $\cos \theta = 10 / (3\sqrt{14}) \approx 0,891$, donc $\theta \approx \mathbf{27,0^\circ}$.

2 Produits scalaires dans un cube ★★★

- Le projeté orthogonal de G sur (AB) est B, donc $\mathbf{AB} \cdot \mathbf{AG} = \mathbf{AB} \cdot \mathbf{AB} = 4^2 = \mathbf{16}$.
- Le projeté de G sur (AC) est C, donc $\mathbf{AC} \cdot \mathbf{AG} = AC^2 = (4\sqrt{2})^2 = 32$; on le confirme en repère (A ; $\mathbf{AB}/4$, $\mathbf{AD}/4$, $\mathbf{AE}/4$) : $\mathbf{AC}(4 ; 4 ; 0)$ et $\mathbf{AG}(4 ; 4 ; 4)$, donc $\mathbf{AC} \cdot \mathbf{AG} = 16 + 16 + 0 = \mathbf{32}$.
- $\mathbf{AF}(4 ; 0 ; 4)$ et $\mathbf{AH}(0 ; 4 ; 4)$, donc $\mathbf{AF} \cdot \mathbf{AH} = 0 + 0 + 16 = \mathbf{16}$. Or $AF = AH = 4\sqrt{2}$ (diagonales de faces), donc $\cos(\text{FAH}) = 16 / (4\sqrt{2} \times 4\sqrt{2}) = 16/32 = \frac{1}{2}$ et l'angle FAH mesure $\mathbf{60^\circ}$ (le triangle AFH est équilatéral, car FH = $4\sqrt{2}$ aussi).

3 Orthogonaux ou non ? ★★★

- $3 \times 1 + (-1) \times 1 + 2 \times (-1) = 3 - 1 - 2 = 0$: orthogonaux.
- $2 \times 1 + 0 \times 5 + (-1) \times 2 = 2 + 0 - 2 = 0$: orthogonaux.
- $1 - 2 + 2 = 1 \neq 0$: non orthogonaux.
- $3t + 2 \times 4 + (-1) \times 2 = 3t + 6 = 0$, donc $t = \mathbf{-2}$.

4 Lire un vecteur normal, tester un point ★★★

- On lit les coefficients : P_1 a pour normal $(3 ; -1 ; 2)$; P_2 s'écrit $x + 0y + 4z - 7 = 0$: normal $(1 ; 0 ; 4)$; P_3 s'écrit $0x + y + 0z - 2 = 0$: normal $(0 ; 1 ; 0)$.
- A : $3 - 1 - 2 - 5 = -5 \neq 0$: $A \notin P_1$. B : $6 - 1 + 0 - 5 = 0$: $B \in P_1$. C : $0 + 3 + 2 - 5 = 0$: $C \in P_1$.

5 Équation à partir d'un point et d'un normal ★★★

- a. $x + 4y - 2z + d = 0$; avec A : $2 - 4 - 6 + d = 0$ donc $d = 8$: $\mathbf{x + 4y - 2z + 8 = 0}$.
- b. $3x - z + d = 0$; avec B : $-3 - 0 + d = 0$ donc $d = 3$: $\mathbf{3x - z + 3 = 0}$.
- c. $z + d = 0$ avec O : $d = 0$: $\mathbf{z = 0}$ (c'est le plan (xOy)).

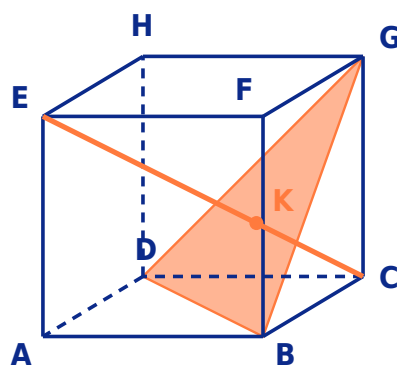
6 Distance d'un point à un plan ★★★

- a. Numérateur : $|2 - 4 - 3 + 7| = 2$; dénominateur : $\sqrt{4 + 4 + 1} = 3$. Distance : $\mathbf{2/3}$.
- b. Numérateur : $|-26| = 26$; dénominateur : $\sqrt{9 + 16 + 144} = 13$. Distance : $\mathbf{2}$.
- c. Numérateur : $|1 + 1 + 1 - 3| = 0$: la distance est $\mathbf{0}$, donc C appartient à R.

7 Parallèles, perpendiculaires, sécants ★★★

- a. Normaux $(2 ; -4 ; 6) = 2 \times (1 ; -2 ; 3)$: colinéaires, donc plans parallèles. Le point $(0 ; 0 ; -1/6)$ est dans P ; dans Q : $-1/2 - 5 \neq 0$. Plans **strictement parallèles**.
- b. Normaux $(2 ; 1 ; -1)$ et $(1 ; -1 ; 1)$: produit scalaire $2 - 1 - 1 = 0$, plans **perpendiculaires** (donc sécants).
- c. Normaux $(1 ; 1 ; 1)$ et $(2 ; -1 ; 1)$: non colinéaires (les rapports $1/2$ et $1/(-1)$ diffèrent), produit scalaire $2 - 1 + 1 = 2 \neq 0$: plans **sécants non perpendiculaires**.

8 La diagonale (EC) et le plan (BDG) ★★★



- a. $E(0 ; 0 ; 1)$, $C(1 ; 1 ; 0)$, donc $\mathbf{EC}(1 ; 1 ; -1)$. $B(1 ; 0 ; 0)$, $D(0 ; 1 ; 0)$, $G(1 ; 1 ; 1)$: $\mathbf{BD}(-1 ; 1 ; 0)$ et $\mathbf{BG}(0 ; 1 ; 1)$. $\mathbf{EC \cdot BD} = -1 + 1 + 0 = 0$ et $\mathbf{EC \cdot BG} = 0 + 1 - 1 = 0$. Les vecteurs $\mathbf{BD}$ et $\mathbf{BG}$ ne sont pas colinéaires : (EC) est orthogonale à deux droites sécantes de (BDG), donc $\mathbf{(EC) \perp (BDG)}$.
- b. $\mathbf{EC}(1 ; 1 ; -1)$ est normal : $x + y - z + d = 0$. Avec B : $1 + d = 0$, $d = -1$. Équation : $\mathbf{x + y - z - 1 = 0}$. Contrôle : D : $0 + 1 - 0 - 1 = 0$ ✓ ; G : $1 + 1 - 1 - 1 = 0$ ✓.

- c. (EC) : $x = t, y = t, z = 1 - t$. Dans le plan : $t + t - (1 - t) - 1 = 3t - 2 = 0$, donc $t = 2/3$ et **K(2/3 ; 2/3 ; 1/3)**.
- d. Par la formule : $|0 + 0 - 1 - 1| / \sqrt{3} = 2/\sqrt{3} = 2\sqrt{3}/3$. Par EK : **EK(2/3 ; 2/3 ; -2/3)**, $EK = (2/3)\sqrt{3} = 2\sqrt{3}/3$ ✓. Distance : **$2\sqrt{3}/3 \approx 1,15$** .

9 Plan par trois points ★★★

- a. **AB(2 ; -1 ; 1)** et **AC(-1 ; -2 ; 2)** ne sont pas colinéaires ($2/(-1) \neq (-1)/(-2)$). Les points ne sont pas alignés.
- b. On cherche **n(a ; b ; c)** avec $2a - b + c = 0$ et $-a - 2b + 2c = 0$. De la première : $c = b - 2a$. Dans la seconde : $-a - 2b + 2b - 4a = -5a = 0$, donc $a = 0$ et $c = b$. Avec $b = 1$: **n(0 ; 1 ; 1)**. Plan : $y + z + d = 0$; avec A : $2 + d = 0$. Équation : **$y + z - 2 = 0$** . Contrôle : B : $1 + 1 - 2 = 0$ ✓ ; C : $0 + 2 - 2 = 0$ ✓.
- c. D : $1 + 1 - 2 = 0$: D est dans le plan. E : $1 + 2 - 2 = 1 \neq 0$: E n'y est pas.

10 Intersection de deux plans ★★★

- a. Normaux (2 ; -1 ; 1) et (1 ; 1 ; -2), non colinéaires : les plans sont sécants.
- b. On additionne : $3x - z + 3 = 0$, donc $z = 3x + 3$. Avec P : $y = 2x + z - 3 = 2x + 3x + 3 - 3 = 5x$. En posant $x = t$: **$x = t, y = 5t, z = 3t + 3$** ($t \in \mathbb{R}$). Vérification dans Q : $t + 5t - 6t - 6 + 6 = 0$ ✓ ; dans P : $2t - 5t + 3t + 3 - 3 = 0$ ✓.
- c. $2 \times 1 + (-1) \times 1 + 1 \times (-2) = -1 \neq 0$: non perpendiculaires.

11 Droite et plan ★★★

- a. **$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 2 \times 1 + 1 \times (-2) + 1 \times 2 = 2 \neq 0$** : d n'est pas parallèle à P, elle le coupe en un point.
- b. **$d : x = 2 + t, y = -2t, z = -1 + 2t$** . Dans P : $4 + 2t - 2t - 1 + 2t - 7 = 2t - 4 = 0$, donc $t = 2$ et le point est **(4 ; -4 ; 3)**. Contrôle : $8 - 4 + 3 - 7 = 0$ ✓.
- c. **$(1 ; -1 ; -1) \cdot (2 ; 1 ; 1) = 2 - 1 - 1 = 0$** : d' est parallèle à P. O n'est pas dans P ($-7 \neq 0$), donc d' est **strictement parallèle**, non incluse.

12 Projeté orthogonal sur un plan ★★★

- a. Un vecteur directeur est le normal (1 ; -2 ; 2) : **$x = 3 + t, y = -1 - 2t, z = 2 + 2t$** .
- b. Dans P : $(3 + t) - 2(-1 - 2t) + 2(2 + 2t) - 4 = 3 + t + 2 + 4t + 4 + 4t - 4 = 5 + 9t = 0$, donc $t = -5/9$. H = $(3 - 5/9 ; -1 + 10/9 ; 2 - 10/9) =$ **(22/9 ; 1/9 ; 8/9)**. Contrôle : $22/9 - 2/9 + 16/9 - 36/9 = 0$ ✓.
- c. $|3 + 2 + 4 - 4| / \sqrt{(1 + 4 + 4)} = 5/3$. Contrôle : $AH = |t| \times 3 = 5/3$ ✓.

13 Distance entre deux plans parallèles ★★★

- a. Même vecteur normal $(2 ; -1 ; 2)$: plans parallèles. Les constantes -1 et 8 sont différentes, donc les plans ne sont pas confondus.
- b. Le point $(0 ; -1 ; 0)$ vérifie $P : 0 + 1 + 0 - 1 = 0$. Sa distance à Q est $|0 + 1 + 0 + 8| / \sqrt{4 + 1 + 4} = 9/3 = 3$. C'est la distance entre les deux plans (elle ne dépend pas du point choisi).

14 Plan médiateur ★★★

- a. Milieu $I(3 ; -1 ; 1)$; $\mathbf{AB}(4 ; 2 ; -4)$, colinéaire à $(2 ; 1 ; -2)$. Plan : $2x + y - 2z + d = 0$; avec $I : 6 - 1 - 2 + d = 0$ donc $d = -3$: **$2x + y - 2z - 3 = 0$** .
- b. Pour $M : 0 + 1 + 2 - 3 = 0$, donc M est dans le plan médiateur. Directement : $MA^2 = 1 + 9 + 16 = 26$ et $MB^2 = 25 + 1 + 0 = 26$, donc $MA = MB$ ✓.

15 Plan tangent à une sphère ★★★

- a. $d(\Omega, P) = |2 + 6 - 6 + 12| / \sqrt{4 + 9 + 36} = 14/7 = 2 = \text{rayon}$: P est **tangent** à S .
- b. H est le projeté de Ω sur $P : x = 1 + 2t, y = 2 + 3t, z = -1 + 6t$. Dans $P : 2 + 4t + 6 + 9t - 6 + 36t + 12 = 14 + 49t = 0$, donc $t = -2/7$. $H = (3/7 ; 8/7 ; -19/7)$.
Contrôle : $6/7 + 24/7 - 114/7 + 84/7 = 0$ ✓ ; $\Omega H = (2/7) \times 7 = 2$ ✓.

16 Tétraèdre trirectangle ★★★

- a. $\mathbf{AB}(-3 ; 4 ; 0)$, $\mathbf{AC}(-3 ; 0 ; 2)$. On cherche $\mathbf{n}$ avec $-3a + 4b = 0$ et $-3a + 2c = 0$: avec $a = 4, b = 3$ et $c = 6$. Plan : $4x + 3y + 6z + d = 0$, avec $A : 12 + d = 0$. **$4x + 3y + 6z - 12 = 0$** . Contrôle : $B : 12 - 12 = 0$ ✓ ; $C : 12 - 12 = 0$ ✓.
- b. $d(O, (ABC)) = |-12| / \sqrt{16 + 9 + 36} = 12/\sqrt{61} \approx 1,54$.
- c. OAB est rectangle en O , d'aire $\frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6$, et la hauteur issue de C est $OC = 2$: $V = \frac{1}{3} \times 6 \times 2 = 4$. Avec la base $ABC : V = \frac{1}{3} \times \text{aire}(ABC) \times 12/\sqrt{61} = 4$, donc $\text{aire}(ABC) = 12 \times \sqrt{61} / 12 = \sqrt{61} \approx 7,81$.
- d. $\mathbf{AB} \wedge \mathbf{AC} = (4 \times 2 - 0 \times 0 ; 0 \times (-3) - (-3) \times 2 ; (-3) \times 0 - 4 \times (-3)) = (8 ; 6 ; 12)$, de norme $\sqrt{64 + 36 + 144} = \sqrt{244} = 2\sqrt{61}$. L'aire est la moitié : $\sqrt{61}$ ✓. (Le vecteur $(8 ; 6 ; 12)$ est le double du normal $(4 ; 3 ; 6)$ trouvé en a.)

17 Volume du tétraèdre BDEG ★★★

- a. $B : 1 - 1 = 0$ ✓ ; $D : 1 - 1 = 0$ ✓ ; $E : 1 - 1 = 0$ ✓. Les trois points non alignés vérifient l'équation : c'est celle du plan (BDE) .
- b. $d(G, (BDE)) = |1 + 1 + 1 - 1| / \sqrt{3} = 2/\sqrt{3} = 2\sqrt{3}/3$.
- c. $BD = BE = DE = \sqrt{2}$: triangle équilatéral de côté $\sqrt{2}$, d'aire $(\sqrt{3}/4) \times 2 = \sqrt{3}/2$.
- d. $V = \frac{1}{3} \times (\sqrt{3}/2) \times (2/\sqrt{3}) = 1/3$. Autre méthode : le cube (volume 1) privé des quatre coins $ABDE, CBDG, FBEG$ et $HDEG$. Chacun est un tétraèdre dont la base

est un triangle rectangle d'aire $\frac{1}{2}$ et dont la hauteur est 1, donc de volume $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{6} : 1 - \frac{4}{6} = \frac{1}{3} \checkmark$.

18 Famille de plans à paramètre ★★★

- Le normal à P_m est $(m ; m + 1 ; 2m - 1)$. Perpendiculaires $\Leftrightarrow$ produit scalaire avec $(3 ; -1 ; 2)$ nul : $3m - (m + 1) + 2(2m - 1) = 6m - 3 = 0$, donc $m = \frac{1}{2}$. Équation : $\frac{1}{2}x + (3/2)y + 0z - 2 = 0$, soit $x + 3y - 4 = 0$.
- Colinéarité avec $(3 ; -1 ; 2)$: il faudrait $m/3 = (m + 1)/(-1)$, donc $-m = 3m + 3$ et $m = -3/4$. Alors $(m + 1) = 1/4$ et $2m - 1 = -5/2$. Les rapports : $m/3 = -1/4$; $(m + 1)/(-1) = -1/4$; $(2m - 1)/2 = -5/4$. Le troisième diffère : **jamais parallèles**.
- Comme P_m n'est jamais parallèle à Q, il ne peut pas être confondu avec Q (des plans confondus sont parallèles). De plus l'origine appartient à Q mais pas à P_m ($-2 \neq 0$), ce qui donne une seconde preuve directe.

19 Intersection de trois plans ★★★

Normaux $(1 ; 1 ; 1)$, $(2 ; -1 ; 1)$, $(1 ; 2 ; -1)$: deux à deux non colinéaires. On résout : P + R donne $2x + 3y = 8$; Q + R donne $3x + y = 5$, donc $y = 5 - 3x$ et $2x + 15 - 9x = 8$, soit $x = 1$, puis $y = 2$ et, avec P, $z = 3$. Vérification : Q : $2 - 2 + 3 = 3 \checkmark$; R : $1 + 4 - 3 = 2 \checkmark$.

Les trois plans se coupent en un **unique point** M(1 ; 2 ; 3). (Géométriquement : la droite $P \cap Q$ n'est pas parallèle à R, car sinon le système aurait aucune ou une infinité de solutions.)

20 Vrai ou faux ? Justifie ★★★

- Faux**. Dans un cube, les plans (ABFE) et (ADHE) sont tous deux perpendiculaires au plan (ABCD), mais ils sont sécants selon (AE).
- Faux dans l'espace**. Avec les axes d'un repère : (Ox) et (Oy) sont orthogonales à (Oz) mais ne sont pas parallèles.
- Faux**. Si $\mathbf{n}$ est normal, tout vecteur $k\mathbf{n}$ avec $k \neq 0$ l'est aussi.
- Vrai**. La deuxième équation s'obtient en multipliant la première par -2 : $2x - y + z = 1$ devient $-4x + 2y - 2z = -2$. Les deux équations décrivent le même ensemble de points.

21 Panneau solaire ★★★

- AB**(4 ; 0 ; 1), **AC**(0 ; 3 ; 2). On cherche $\mathbf{n}$: $4a + c = 0$ et $3b + 2c = 0$. Avec $c = -12$: $a = 3$ et $b = 8$. Plan : $3x + 8y - 12z + d = 0$, avec A : $-24 + d = 0$. **$3x + 8y - 12z + 24 = 0$** . Contrôle : B : $12 - 36 + 24 = 0 \checkmark$; C : $24 - 48 + 24 = 0 \checkmark$.
- Numérateur : $|3 + 8 - 120 + 24| = 85$. Dénominateur : $\sqrt{9 + 64 + 144} = \sqrt{217} \approx$

14,73. Distance $\approx 85/14,73 \approx \mathbf{5,77 \text{ m}}$.

- c. Avec $x = 1$ et $y = 1$: $3 + 8 - 12z + 24 = 0$, donc $z = 35/12 \approx \mathbf{2,92 \text{ m}}$. Le drone touche le panneau à l'altitude d'environ 2,92 m, en descendant de $10 - 2,92 \approx 7,08 \text{ m}$ (plus que la distance au plan, car la descente n'est pas perpendiculaire).

22 Hauteur d'une pyramide ★★★

- a. $\mathbf{BC}(0 ; 4 ; 0)$, $\mathbf{BS}(-2 ; 2 ; 3)$. Un normal $(a ; b ; c)$ vérifie $4b = 0$ et $-2a + 2b + 3c = 0$, donc $b = 0$ et $-2a + 3c = 0$: $\mathbf{n}(3 ; 0 ; 2)$. Plan : $3x + 2z + d = 0$, avec B : $12 + d = 0$. $\mathbf{3x + 2z - 12 = 0}$. Contrôle : S : $6 + 6 - 12 = 0 \checkmark$; C : $12 - 12 = 0 \checkmark$.
- b. $d(A, (SBC)) = |-12| / \sqrt{13} = \mathbf{12/\sqrt{13} \approx 3,33}$.
- c. Le triangle SBC a pour base $BC = 4$ et pour hauteur la distance de S à la droite (BC), qui vaut $\sqrt{(2^2 + 3^2)} = \sqrt{13}$ (BC est dirigée par l'axe des y, le projeté de S sur (BC) est $(4 ; 2 ; 0)$). Aire = $\frac{1}{2} \times 4 \times \sqrt{13} = 2\sqrt{13}$. Volume de ASBC = $\frac{1}{3} \times 2\sqrt{13} \times 12/\sqrt{13} = \mathbf{8}$. Contrôle : la pyramide SABCD a pour volume $\frac{1}{3} \times 16 \times 3 = 16$, et le tétraèdre SABC en est exactement la moitié (le triangle ABC est la moitié du carré, même hauteur) : $8 \checkmark$.