

Produit scalaire et plans de l'espace

Exercices de maths - Terminale

22 exercices classés par difficulté (★ facile, ★★ moyen, ★★★ difficile). Cherche d'abord sans regarder le corrigé !

1 Produits scalaires en coordonnées ★★★

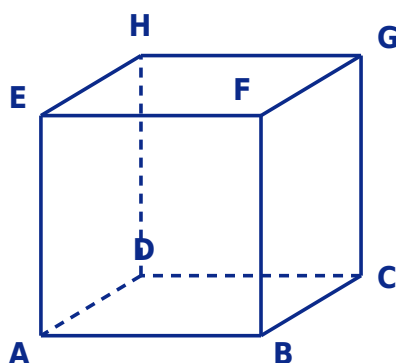
Dans un repère orthonormé, on donne $\mathbf{u}(2 ; -1 ; 3)$, $\mathbf{v}(4 ; 5 ; -1)$ et $\mathbf{w}(1 ; -2 ; 2)$.

- Calcule $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$. Que peux-tu dire de $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$?
- Calcule $\|\mathbf{u}\|$ et $\|\mathbf{w}\|$.
- Calcule $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$ puis une valeur approchée de l'angle entre $\mathbf{u}$ et $\mathbf{w}$, au dixième de degré près.

2 Produits scalaires dans un cube ★★★

ABCDEFGH est un cube d'arête 4 cm. Calcule, en justifiant par une projection orthogonale :

- $\mathbf{AB} \cdot \mathbf{AG}$;
- $\mathbf{AC} \cdot \mathbf{AG}$;
- $\mathbf{AF} \cdot \mathbf{AH}$, puis la mesure de l'angle FAH.



3 Orthogonaux ou non ? ★★★

Dans un repère orthonormé, dis si les vecteurs sont orthogonaux :

- $(3 ; -1 ; 2)$ et $(1 ; 1 ; -1)$;

- b. $(2 ; 0 ; -1)$ et $(1 ; 5 ; 2)$;
- c. $(1 ; 1 ; 1)$ et $(1 ; -2 ; 2)$.

d. Détermine le réel t pour que $(t ; 2 ; -1)$ soit orthogonal à $(3 ; 4 ; 2)$.

4 Lire un vecteur normal, tester un point ★★★

- a. Donne un vecteur normal à chacun des plans : $P_1 : 3x - y + 2z - 5 = 0$; $P_2 : x + 4z = 7$; $P_3 : y = 2$.
- b. Parmi $A(1 ; 1 ; -1)$, $B(2 ; 1 ; 0)$ et $C(0 ; -3 ; 1)$, lesquels appartiennent à P_1 ?

5 Équation à partir d'un point et d'un normal ★★★

Détermine une équation cartésienne du plan :

- a. passant par $A(2 ; -1 ; 3)$ et de vecteur normal $\mathbf{n}(1 ; 4 ; -2)$;
- b. passant par $B(-1 ; 2 ; 0)$ et de vecteur normal $\mathbf{n}(3 ; 0 ; -1)$;
- c. passant par l'origine O et de vecteur normal $(0 ; 0 ; 1)$.

6 Distance d'un point à un plan ★★★

Calcule la distance du point au plan :

- a. $A(1 ; 2 ; -3)$ et $P : 2x - 2y + z + 7 = 0$;
- b. $O(0 ; 0 ; 0)$ et $Q : 3x + 4y + 12z - 26 = 0$;
- c. $C(1 ; 1 ; 1)$ et $R : x + y + z - 3 = 0$.

7 Parallèles, perpendiculaires, sécants ★★★

Étudie la position relative de P et Q :

- a. $P : 2x - 4y + 6z + 1 = 0$ et $Q : x - 2y + 3z - 5 = 0$;
- b. $P : 2x + y - z = 0$ et $Q : x - y + z + 3 = 0$;
- c. $P : x + y + z - 1 = 0$ et $Q : 2x - y + z + 4 = 0$.

8 La diagonale (EC) et le plan (BDG) ★★★

ABCDEFGH est un cube d'arête 1, dans le repère orthonormé $(A ; \mathbf{AB}, \mathbf{AD}, \mathbf{AE})$.

- a. Montre que la droite (EC) est orthogonale au plan (BDG).
- b. Dédus-en une équation cartésienne du plan (BDG).
- c. Détermine les coordonnées du point K, intersection de (EC) et de (BDG).

d. Calcule la distance du point E au plan (BDG) de deux façons.

9 Plan par trois points ★★★

On donne $A(1 ; 2 ; 0)$, $B(3 ; 1 ; 1)$ et $C(0 ; 0 ; 2)$.

- Montre que A, B, C ne sont pas alignés.
- Détermine un vecteur normal puis une équation du plan (ABC).
- Les points $D(5 ; 1 ; 1)$ et $E(1 ; 1 ; 2)$ appartiennent-ils à ce plan ?

10 Intersection de deux plans ★★★

$P : 2x - y + z - 3 = 0$ et $Q : x + y - 2z + 6 = 0$.

- Montre que P et Q sont sécants.
- Donne une représentation paramétrique de leur droite d'intersection.
- P et Q sont-ils perpendiculaires ?

11 Droite et plan ★★★

On considère la droite d passant par $A(2 ; 0 ; -1)$ de vecteur directeur $\mathbf{u}(1 ; -2 ; 2)$ et le plan $P : 2x + y + z - 7 = 0$.

- d est-elle parallèle à P ?
- Détermine leur point d'intersection.
- La droite d' passant par O et de vecteur directeur $(1 ; -1 ; -1)$ est-elle parallèle à P ? Est-elle incluse dans P ?

12 Projeté orthogonal sur un plan ★★★

Soit $A(3 ; -1 ; 2)$ et $P : x - 2y + 2z - 4 = 0$.

- Donne une représentation paramétrique de la droite d passant par A et orthogonale à P.
- Détermine les coordonnées du projeté orthogonal H de A sur P.
- Calcule la distance de A à P.

13 Distance entre deux plans parallèles ★★★

$P : 2x - y + 2z - 1 = 0$ et $Q : 2x - y + 2z + 8 = 0$.

- Montre que P et Q sont strictement parallèles.
- Trouve un point de P, puis calcule la distance entre P et Q.

14 Plan médiateur ★★★

$A(1 ; -2 ; 3)$ et $B(5 ; 0 ; -1)$.

- Détermine une équation du plan médiateur de $[AB]$.
- Vérifie que $M(0 ; 1 ; -1)$ est équidistant de A et B.

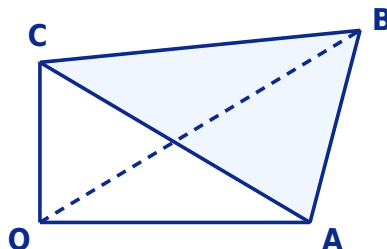
15 Plan tangent à une sphère ★★★

La sphère S a pour centre $\Omega(1 ; 2 ; -1)$ et pour rayon 2. Le plan P a pour équation $2x + 3y + 6z + 12 = 0$.

- Montre que P est tangent à S .
- Détermine le point de contact H .

16 Tétraèdre trirectangle ★★★

Dans un repère orthonormé, $O(0 ; 0 ; 0)$, $A(3 ; 0 ; 0)$, $B(0 ; 4 ; 0)$, $C(0 ; 0 ; 2)$.



- Détermine une équation du plan (ABC) .
- Calcule la distance de O au plan (ABC) .
- Calcule le volume du tétraèdre $OABC$ avec la base OAB , puis déduis-en l'aire du triangle ABC .
- Vérifie l'aire de ABC avec les vecteurs $\mathbf{AB}$ et $\mathbf{AC}$.

17 Volume du tétraèdre BDEG ★★★

$ABCDEFGH$ est un cube d'arête 1 dans le repère $(A ; \mathbf{AB}, \mathbf{AD}, \mathbf{AE})$.

- Montre que $x + y + z - 1 = 0$ est une équation de (BDE) .
- Calcule la distance de G à (BDE) .
- Calcule l'aire du triangle BDE (de côtés égaux).
- Déduis-en le volume du tétraèdre $BDEG$, puis retrouve-le en retranchant au cube

quatre « coins » de même type.

18 Famille de plans à paramètre ★★★

Pour tout réel m , on note P_m le plan d'équation $mx + (m + 1)y + (2m - 1)z - 2 = 0$, et Q le plan $3x - y + 2z = 0$.

- Pour quelle valeur de m les plans P_m et Q sont-ils perpendiculaires ? Donne alors une équation de P_m .
- Existe-t-il une valeur de m pour laquelle P_m est parallèle à Q ?
- Montre que P_m n'est jamais confondu avec Q .

19 Intersection de trois plans ★★★

Étudie l'intersection des trois plans $P : x + y + z = 6$, $Q : 2x - y + z = 3$ et $R : x + 2y - z = 2$. Vérifie que leurs vecteurs normaux sont deux à deux non colinéaires, résous le système puis interprète le résultat.

20 Vrai ou faux ? Justifie ★★★

Dis si chaque affirmation est vraie ou fausse, et justifie.

- Deux plans perpendiculaires à un même plan sont parallèles.
- Deux droites orthogonales à une même droite sont parallèles.
- Un plan admet un unique vecteur normal.
- Les plans $2x - y + z = 1$ et $-4x + 2y - 2z = -2$ sont confondus.

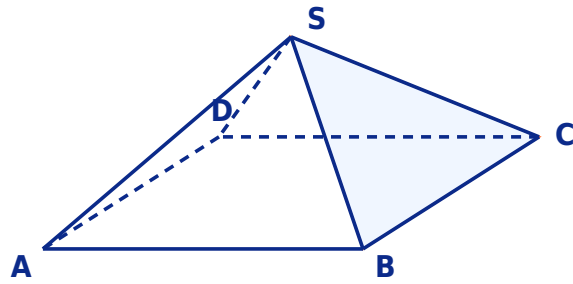
21 Panneau solaire ★★★

Un panneau solaire plan est fixé sur un toit. Dans un repère orthonormé (unité : le mètre, z est l'altitude), il passe par $A(0 ; 0 ; 2)$, $B(4 ; 0 ; 3)$ et $C(0 ; 3 ; 4)$.

- Détermine une équation du plan du panneau.
- Un drone est en $M(1 ; 1 ; 10)$. À quelle distance du plan se trouve-t-il ? (arrondi au centimètre)
- Le drone descend verticalement (x et y constants) jusqu'à toucher le plan. À quelle altitude le touche-t-il ?

22 Hauteur d'une pyramide ★★★

Dans un repère orthonormé, la pyramide $SABCD$ a pour base le carré $ABCD$ avec $A(0 ; 0 ; 0)$, $B(4 ; 0 ; 0)$, $C(4 ; 4 ; 0)$, $D(0 ; 4 ; 0)$, et pour sommet $S(2 ; 2 ; 3)$.



- Détermine une équation du plan (SBC).
- Calcule la distance de A au plan (SBC).
- Calcule l'aire de SBC puis le volume du tétraèdre ASBC. Vérifie par un raisonnement de volume de la pyramide.