

Proportionnalité

Cours de maths - 5ème

Au marché, plus tu achètes de kilos, plus tu paies : mais est-ce toujours « deux fois plus cher pour deux fois plus de kilos » ? Dans ce chapitre, tu apprends à reconnaître la proportionnalité, à compléter un tableau, à utiliser le coefficient, à calculer des pourcentages, à lire une échelle et à tracer un graphique. C'est l'un des outils les plus utiles de tout le collège.

1. Reconnaître une situation de proportionnalité

Grandeurs proportionnelles

Deux grandeurs sont **proportionnelles** lorsqu'on passe des valeurs de l'une aux valeurs de l'autre en multipliant toujours par le même nombre. Si l'une est multipliée par 2, par 3, par 10..., l'autre l'est aussi.

Exemple

Un kilogramme de tomates coûte 3 €. Pour 2 kg, on paie 6 € ; pour 5 kg, on paie 15 €. Le prix est proportionnel à la masse achetée.

Pour t'entraîner à reconnaître ces situations, retiens quelques contre-exemples classiques :

- l'âge d'un enfant et sa taille : à 12 ans, on n'est pas deux fois plus grand qu'à 6 ans ;
- un abonnement avec un prix fixe de départ (on paie 5 € même si on ne s'en sert pas) ;
- des tarifs dégressifs : le lot de 10 est moins cher que dix fois le prix d'un seul ;
- l'aire d'un carré et la longueur de son côté (si le côté double, l'aire est multipliée par 4).

Piège

« Quand l'un augmente, l'autre augmente aussi » ne suffit pas pour dire que c'est proportionnel ! Il faut que le passage se fasse en multipliant toujours par le même nombre.

2. Le tableau de proportionnalité et le coefficient

On range les valeurs correspondantes dans un tableau : une ligne par grandeur. Voici le

prix de pommes vendues 2 € le kilogramme.

Masse (kg)	1	3	5	12
Prix (€)	2	6	10	24

Coefficient de proportionnalité

Dans un tableau de proportionnalité, le nombre par lequel on multiplie chaque valeur de la première ligne pour obtenir celle de la seconde ligne s'appelle le **coefficient de proportionnalité**. On l'obtient en divisant une valeur de la deuxième ligne par la valeur correspondante de la première.

Exemple : tester un tableau

Nombre de baguettes	3	5	8
Prix (€)	3,60	6	9,60

$3,60 \div 3 = 1,2$; $6 \div 5 = 1,2$; $9,60 \div 8 = 1,2$. Les trois quotients sont égaux : le tableau est un tableau de proportionnalité, de coefficient 1,2. Une baguette coûte 1,20 €.

Méthode : savoir si un tableau est de proportionnalité

1. Calcule, pour chaque colonne, le quotient (valeur de la 2^e ligne) $\div$ (valeur de la 1^{re} ligne).
2. Si tous les quotients sont égaux, c'est un tableau de proportionnalité ; sinon, ce n'en est pas un.

Contre-exemple

Nombre de places	2	4	6
Prix (€)	7	12	17

$7 \div 2 = 3,5$ mais $12 \div 4 = 3$. Les quotients sont différents : ce n'est pas un tableau de proportionnalité (il y a sans doute un prix fixe d'entrée de 2 € : $2 + 2 \times 2,5 = 7$).

3. Calculer une valeur manquante (la quatrième proportionnelle)

Dans un tableau de proportionnalité, il y a plusieurs façons de trouver une valeur qui manque. Choisis la plus simple selon les nombres.

Méthode 1 : passer d'une colonne à l'autre en multipliant

Pour 4 stylos, on paie 6 €. Combien paie-t-on pour 12 stylos ?

Nombre de stylos	4	12
Prix (€)	6	?

On passe de 4 à 12 en multipliant par 3, donc on multiplie aussi 6 par 3 : $6 \times 3 = 18$.
Les 12 stylos coûtent 18 €.

Méthode 2 : additionner ou soustraire des colonnes

Si 3 m de ruban coûtent 4,50 € et 5 m coûtent 7,50 €, alors 8 m ($3 + 5$) coûtent $4,50 + 7,50 = 12$ €. De même 2 m ($5 - 3$) coûtent $7,50 - 4,50 = 3$ €.

Méthode 3 : le retour à l'unité (règle de trois)

On cherche d'abord la valeur pour 1. Si 7 croissants coûtent 8,40 €, alors 1 croissant coûte $8,40 \div 7 = 1,20$ €, et 10 croissants coûtent $10 \times 1,20 = 12$ €.

Méthode 4 : utiliser le coefficient

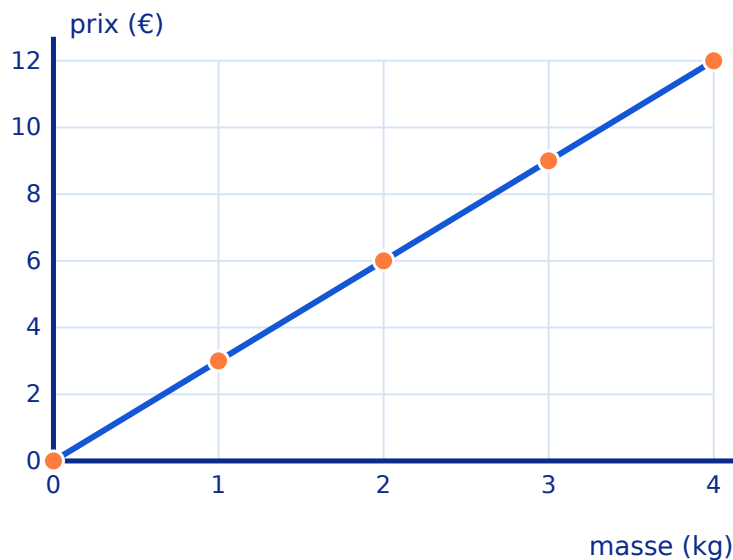
Une voiture consomme 24 L pour 400 km. Le coefficient est $24 \div 400 = 0,06$ L par kilomètre. Pour 650 km : $650 \times 0,06 = 39$ L.

Astuce

Regarde les nombres avant de te lancer : si l'un est le double, le triple, la moitié de l'autre, la méthode 1 est la plus rapide. Sinon, pense au retour à l'unité ou au coefficient.

4. Représenter une situation de proportionnalité par un graphique

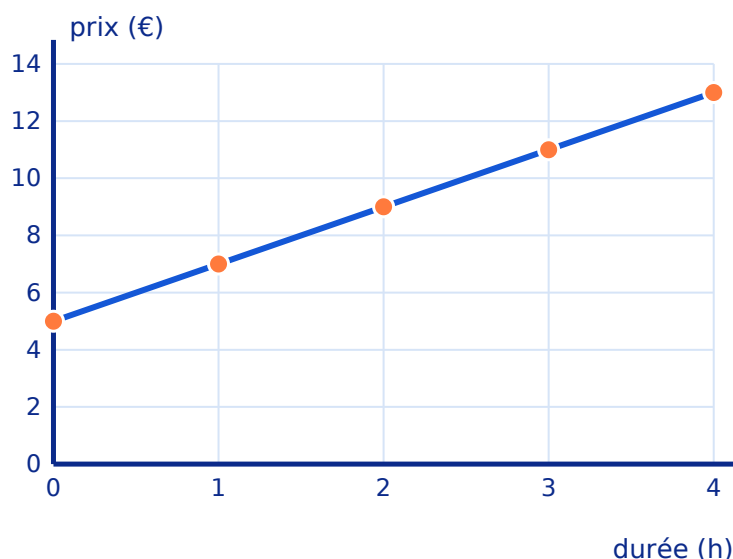
Avec la masse en abscisse (axe horizontal) et le prix en ordonnée (axe vertical), chaque colonne du tableau donne un point. Voici les tomates à 3 € le kilogramme.



Propriété

Une situation de proportionnalité est représentée par des points **alignés avec l'origine du repère** : ils sont sur une droite qui passe par le point de coordonnées (0 ; 0). Réciproquement, si les points sont sur une droite qui passe par l'origine, la situation est une situation de proportionnalité.

Au contraire, voici la location d'un vélo avec 5 € de frais fixes puis 2 € par heure. Les points sont alignés, mais la droite ne passe pas par l'origine : ce n'est pas de la proportionnalité.



Lire un graphique

Pour trouver le prix de 2,5 kg sur le premier graphique, pars de 2,5 sur l'axe horizontal, monte jusqu'à la droite, puis lis la valeur sur l'axe vertical : on trouve 7,5 €.

5. Les pourcentages

Pourcentage

Un pourcentage exprime une proportion sur la base de 100. Dire que « 30 % des élèves sont gauchers », c'est dire que sur 100 élèves, 30 le sont : $30\% = \mathbf{30/100}$.

Quelques pourcentages à connaître par cœur :

Pourcentage	50 %	25 %	75 %	10 %	20 %
Fraction	1/2	1/4	3/4	1/10	1/5
Calcul	prendre la moitié	diviser par 4	trois quarts	diviser par 10	diviser par 5

Méthode : calculer un pourcentage d'une quantité

Pour prendre 35 % de 240 élèves, on utilise un tableau de proportionnalité :

Pourcentage	100	35
Nombre d'élèves	240	?

On cherche 1 % : $240 \div 100 = 2,4$; puis 35 % : $35 \times 2,4 = 84$. Donc 35 % de 240 = 84.
On peut aussi calculer directement $240 \times \mathbf{35/100} = 84$.

Méthode : calculer la proportion en pourcentage

Dans un club de 40 adhérents, 14 sont des filles. On cherche le pourcentage de filles :
 $14 \div 40 = 0,35 = \mathbf{35/100}$, soit 35 %.

Raccourci

10 % d'un nombre, c'est ce nombre divisé par 10. Pour 5 %, divise ensuite par 2. Pour 15 %, ajoute 10 % et 5 %. Par exemple, 15 % de 80 = $8 + 4 = 12$.

6. Réductions et augmentations en pourcentage

Méthode : appliquer une réduction

1. Calcule le montant de la réduction : pourcentage de la quantité.
2. Soustrais-le au prix de départ.

Un jeu coûte 45 € avec 20 % de réduction. Réduction : $45 \times \frac{20}{100} = 9$ €. Nouveau prix : $45 - 9 = 36$ €.

Appliquer une augmentation

Un abonnement de 18 € augmente de 5 %. Augmentation : $18 \times \frac{5}{100} = 0,90$ €. Nouveau prix : $18 + 0,90 = 18,90$ €.

La TVA

Un article coûte 40 € hors taxe et la TVA est de 20 %. TVA : $40 \times \frac{20}{100} = 8$ €. Prix à payer : $40 + 8 = 48$ €.

Piège

Une hausse de 20 % suivie d'une baisse de 20 % ne ramène pas au prix de départ : 100 € deviennent 120 €, puis $120 - 24 = 96$ €. Les pourcentages ne s'additionnent pas, car ils ne portent pas sur la même quantité.

7. Échelles : cartes et plans

Échelle

Sur un plan ou une carte, les longueurs sont proportionnelles aux longueurs réelles. L'échelle est le coefficient de proportionnalité entre les longueurs mesurées sur le plan et les longueurs réelles (exprimées dans la même unité). Une échelle de **1/500** signifie que 1 cm sur le plan représente 500 cm, soit 5 m, dans la réalité.

Méthode

Une carte est à l'échelle **1/20000**. Deux villages sont distants de 6 cm sur la carte.

Sur la carte (cm)	1	6
Dans la réalité (cm)	20 000	120 000

$$6 \times 20\,000 = 120\,000 \text{ cm} = 1\,200 \text{ m} = 1,2 \text{ km}.$$

Piège

Convertis toujours à la fin dans une unité adaptée : 120 000 cm n'est pas une distance

« parlante », alors que 1,2 km l'est. Pense aussi que $100\,000\text{ cm} = 1\text{ km}$ et $100\text{ cm} = 1\text{ m}$.

8. Vitesse constante et problèmes de la vie courante

Un mouvement à **vitesse constante** est une situation de proportionnalité : la distance est proportionnelle à la durée. Le coefficient est la vitesse. Un cycliste roule à 15 km/h : en 2 h il fait 30 km, en 30 min il fait 7,5 km.

Mathbot te conseille

Dans un problème, écris toujours un tableau avec les noms et les unités des deux grandeurs. Place ce que tu connais, puis cherche la case vide. N'oublie pas la phrase réponse !

Attention aux unités de temps : 20 min = **$\frac{1}{3}$** h, 30 min = 0,5 h, 45 min = 0,75 h. Pour éviter les erreurs, tu peux aussi garder les minutes dans le tableau.

À retenir

- Deux grandeurs sont proportionnelles si l'on passe de l'une à l'autre en multipliant toujours par le même nombre : le coefficient de proportionnalité.
- Pour tester un tableau, on calcule les quotients : ils doivent tous être égaux.
- Pour une valeur manquante : multiplier, additionner des colonnes, retour à l'unité ou coefficient.
- Un graphique de proportionnalité est une droite qui passe par l'origine.
- Un pourcentage est une proportion sur 100 : $25\% = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$.
- Réduction : prix – (pourcentage × prix). Augmentation : prix + (pourcentage × prix).
- Échelle **$\frac{1}{N}$** : 1 cm sur le plan représente N cm dans la réalité.
- À vitesse constante, la distance est proportionnelle à la durée.