

Proportionnalité

Cours de maths - 6ème

Au marché, à la boulangerie, sur une carte ou dans une recette de cuisine, tu rencontres sans cesse la **proportionnalité**. Dans ce chapitre, tu apprends à la reconnaître, à utiliser un tableau, à calculer le coefficient, puis à résoudre des problèmes de vitesse, d'échelle et de pourcentage.

1. Reconnaître une situation de proportionnalité

Grandeurs proportionnelles Deux grandeurs sont **proportionnelles** lorsque l'on passe des valeurs de l'une aux valeurs de l'autre en **multipliant toujours par le même nombre** (non nul). Ce nombre s'appelle le **coefficient de proportionnalité**.

Une situation proportionnelle Une baguette coûte 0,90 €. Deux baguettes coûtent 1,80 €, trois baguettes 2,70 €, dix baguettes 9 €. Le prix s'obtient toujours en multipliant le nombre de baguettes par 0,90. Le prix est donc proportionnel au nombre de baguettes et le coefficient est **0,90** (c'est le prix d'une baguette).

Une situation non proportionnelle Lucas mesure 100 cm à 4 ans et 130 cm à 8 ans. À 8 ans, il a deux fois plus d'années, mais il n'est pas deux fois plus grand ! La taille n'est pas proportionnelle à l'âge.

Des mots qui annoncent la proportionnalité Quand tu lis « prix **au** kilogramme », « prix unitaire », « salaire horaire », « vitesse constante » ou « consommation pour 100 km », pense proportionnalité : on parle de ce qui correspond à **1** unité.

2. Le tableau de proportionnalité et le coefficient

On range les valeurs de deux grandeurs dans un **tableau de proportionnalité** : chaque colonne contient deux valeurs qui se correspondent.

Nombre de croissants	3	5	8
Prix (€)	3,30	5,50	8,80

Pour passer de la première ligne à la seconde, on multiplie par 1,1. Pour revenir en arrière, on divise par 1,1.

Vérifier si un tableau est un tableau de proportionnalité 1) On divise chaque

valeur de la deuxième ligne par la valeur de la première ligne qui est au-dessus. 2) Si tous les quotients sont égaux, le tableau est proportionnel et ce quotient est le **coefficient**. Si un seul est différent, le tableau n'est pas proportionnel.
Ici : $3,30 \div 3 = 1,1$; $5,50 \div 5 = 1,1$; $8,80 \div 8 = 1,1$. Les quotients sont égaux : c'est proportionnel.

Âge (ans)	4	8
Taille (cm)	100	130

Ici $100 \div 4 = 25$ mais $130 \div 8 = 16,25$. Les quotients sont différents : ce n'est **pas** un tableau de proportionnalité.

Piège Ce n'est pas parce que les nombres augmentent ensemble qu'il y a proportionnalité. Il faut que **tous** les quotients soient égaux.

3. Résoudre un problème de proportionnalité

Il existe trois grandes méthodes. Tu choisis la plus rapide selon les nombres.

Méthode 1 : utiliser le coefficient On multiplie (ou on divise) par le coefficient.
Exemple : 1 L de peinture couvre 4 m². Pour 18 m², il faut $18 \div 4 = 4,5$ L. Pour 3 L, on peut peindre $3 \times 4 = 12$ m².

Méthode 2 : le passage par l'unité On calcule d'abord la valeur pour **1**, puis on multiplie. Exemple : 4 tickets de manège coûtent 26 €. Un ticket coûte $26 \div 4 = 6,5$ €. Donc 7 tickets coûtent $7 \times 6,5 = 45,5$ €.

Méthode 3 : la linéarité Dans un tableau de proportionnalité, on peut **additionner** deux colonnes (la colonne somme est aussi dans le tableau), **soustraire** deux colonnes, ou **multiplier / diviser** une colonne par un même nombre.

Nombre de stylos	4	6	10 (= 4 + 6)	2 (= 6 - 4)	12 (= 3 × 4)
Prix (€)	5,60	8,40	14	2,80	16,80

Par exemple, 10 stylos = 4 stylos + 6 stylos, donc le prix est $5,60 + 8,40 = 14$ €. Et 12 stylos = 3 × 4 stylos, donc $3 \times 5,60 = 16,80$ €. Cette méthode évite de calculer le prix d'un seul stylo.

Attention La linéarité ne marche que si la situation est proportionnelle ! Si un magasin fait un prix spécial pour un lot, tu ne peux pas additionner les prix.

4. Vitesse constante

Vitesse moyenne Quand un mobile roule à **vitesse constante**, la distance parcourue est proportionnelle à la durée. Le coefficient de proportionnalité est la **vitesse**. On écrit par exemple 90 km/h : en 1 heure, on parcourt 90 km.

À savoir distance = vitesse $\times$ durée ; durée = distance $\div$ vitesse ; vitesse = distance $\div$ durée. Attention aux unités : si la vitesse est en km/h, la durée est en heures et la distance en km.

Exemple Un train roule à 120 km/h. En 3 h, il parcourt $3 \times 120 = 360$ km. En 30 min (0,5 h), il parcourt 60 km. Pour faire 300 km, il lui faut $300 \div 120 = 2,5$ h, soit **2 h 30 min**.

Durée (h)	1	2	0,5	2,5
Distance (km)	120	240	60	300

Piège des heures 1 h 30 min, c'est 1,5 h et non 1,30 h ! 15 min = 0,25 h ; 30 min = 0,5 h ; 45 min = 0,75 h ; 20 min = **1/3** h.

5. Échelles

Échelle d'un plan ou d'une carte Un plan est à l'**échelle 1/25 000** lorsque les longueurs réelles sont 25 000 fois plus grandes que les longueurs sur le plan. La longueur réelle est proportionnelle à la longueur sur le plan.

Exemple À l'échelle 1/25 000, 1 cm sur la carte représente 25 000 cm dans la réalité, c'est-à-dire 250 m. Donc 6 cm sur la carte représentent $6 \times 250 = 1\,500$ m = 1,5 km. Et pour une distance réelle de 3 km, on mesure $3\,000 \div 250 =$ **12 cm** sur la carte.

Sur la carte (cm)	1	6	12
Dans la réalité (m)	250	1 500	3 000

Convertir proprement On multiplie la mesure du plan par le dénominateur de l'échelle (le résultat est dans la même unité), puis on convertit : 100 cm = 1 m ; 100 000 cm = 1 km.

6. Pourcentages simples

Pourcentage Prendre **10 %** d'une quantité, c'est en prendre **10/100**, soit un dixième. Le résultat est proportionnel à la quantité de départ.

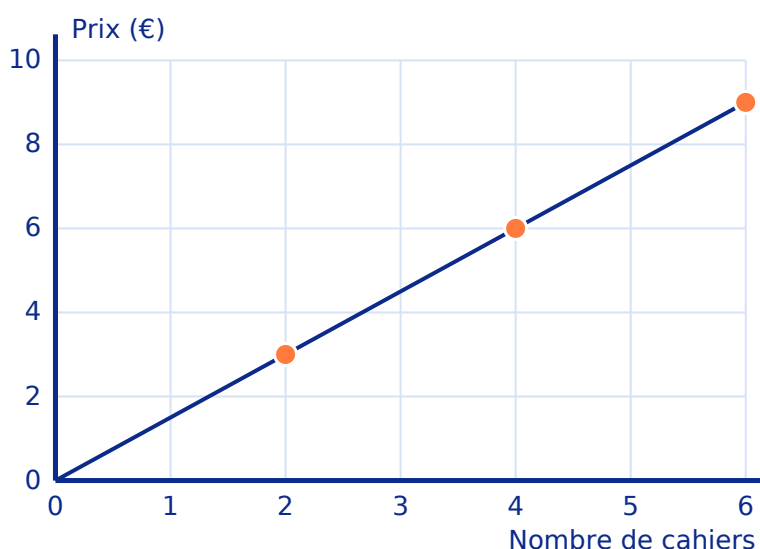
À savoir par cœur 50 % = la moitié ; 25 % = le quart ; 75 % = les trois quarts ; 10 % = le dixième ; 20 % = deux fois 10 % ; 1 % = le centième.

Une réduction de 30 % Un jeu coûte 60 €. 10 % de 60 € = 6 €. Donc 30 % de 60 € = $3 \times 6 = 18$ €. Le jeu est vendu $60 - 18 = 42$ €.

Combiner 15 % = 10 % + 5 %. Sur 80 € : 10 % = 8 €, 5 % = 4 € (la moitié), donc 15 % = 12 €.

7. Représentation graphique

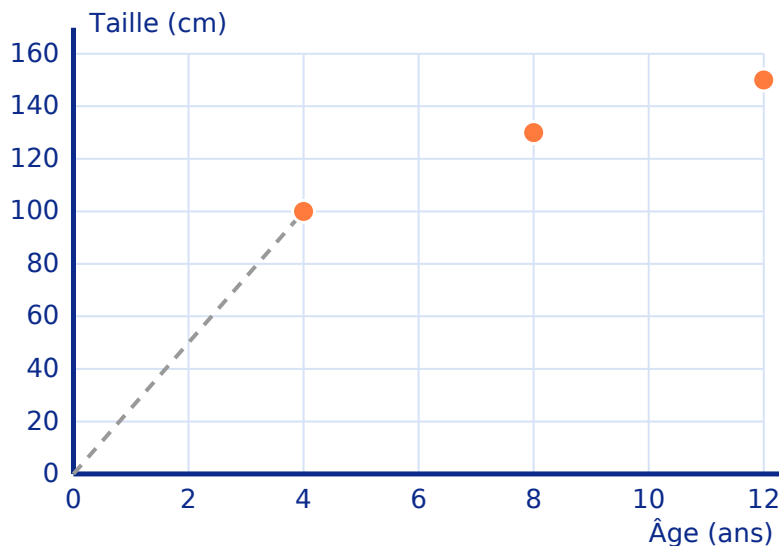
On peut représenter un tableau par des points : la première grandeur en abscisse (axe horizontal), la seconde en ordonnée (axe vertical). Voici le prix de cahiers à 1,50 € l'un :



Les points sont alignés avec l'origine du repère.

Propriété Si deux grandeurs sont proportionnelles, les points sont **alignés sur une droite qui passe par l'origine** du repère. Si les points ne sont pas alignés, ou si la droite ne passe pas par l'origine, la situation n'est pas proportionnelle.

Pour la taille de Lucas selon son âge, la droite pointillée part de l'origine et du premier point, mais les autres points restent loin d'elle :



Les points ne sont pas alignés avec l'origine : ce n'est pas de la proportionnalité.

8. Proportionnel ou non ? Les pièges

Situations non proportionnelles Un prix avec abonnement (par exemple 10 € par mois plus 4 € la séance), un tarif dégressif, l'âge et la taille, ou encore le nombre d'ouvriers et la durée d'un chantier (plus d'ouvriers, moins de jours) ne sont pas proportionnels.

Carré : périmètre et aire Le périmètre d'un carré est proportionnel à son côté (coefficient 4). Mais pas l'aire : un carré de côté 2 cm a une aire de 4 cm², un carré de côté 4 cm a une aire de 16 cm². Le côté double, l'aire est multipliée par 4.

Le mot de Mathbot Avant de calculer, pose-toi toujours la question : « si je double une valeur, l'autre double-t-elle aussi ? » Si la réponse est non, ne cherche pas de coefficient !

À retenir

- Deux grandeurs sont proportionnelles si on passe de l'une à l'autre en multipliant toujours par le même nombre, le coefficient de proportionnalité.
- Pour tester un tableau, on calcule tous les quotients (2ème ligne ÷ 1ère ligne) : s'ils sont égaux, il y a proportionnalité.
- Pour résoudre un problème : coefficient, passage par l'unité ou linéarité (somme, différence, multiple de colonnes).
- À vitesse constante, la distance est proportionnelle à la durée ; distance = vitesse × durée.
- Une échelle 1/N signifie que la réalité est N fois plus grande que le dessin ; on convertit ensuite en m ou en km.
- Un pourcentage se calcule avec 50 % = moitié, 25 % = quart, 10 % = dixième.
- Graphiquement : points alignés avec l'origine = proportionnalité.