

Proportionnalité et pourcentages

Cours de maths - 4ème

Prix à payer, recettes de cuisine, soldes, cartes, vitesses : la **proportionnalité** est partout. Dans ce chapitre, tu retrouves tous les outils pour la reconnaître et l'utiliser, puis tu apprends à calculer avec les **pourcentages** (parts, hausses, baisses, évolutions successives), à lire une **échelle** et à manipuler vitesses et débits.

1. Rappels : situations de proportionnalité

Grandeurs proportionnelles Deux grandeurs sont **proportionnelles** quand on passe des valeurs de l'une aux valeurs de l'autre en multipliant toujours par le **même nombre**, appelé **coefficient de proportionnalité**. On range alors les valeurs dans un **tableau de proportionnalité**.

Exemple Les pommes coûtent 2,50 € le kilogramme. Le prix est proportionnel à la masse achetée et le coefficient est 2,5.

Masse (kg)	2	5	8	10
Prix (€)	5	12,5	20	25



Pour chaque colonne, on multiplie la masse par 2,5 pour obtenir le prix : $5 \times 2,5 = 12,5$ et $8 \times 2,5 = 20$.

Piège Plus une grandeur augmente, plus l'autre augmente... cela ne suffit pas pour dire que c'est proportionnel ! L'âge d'un enfant et sa taille augmentent ensemble, mais ne sont pas proportionnels : à 10 ans, on ne mesure pas deux fois la taille d'un enfant de 5 ans.

2. Reconnaître et compléter un tableau de proportionnalité

Reconnaître un tableau de proportionnalité On calcule les quotients « deuxième ligne ÷ première ligne » pour chaque colonne. Si on trouve **toujours le même résultat**, le tableau est de proportionnalité et ce résultat est le coefficient. Si un seul quotient est différent, ce n'est pas un tableau de proportionnalité.

Exemple Tableau : $4 \rightarrow 14$; $6 \rightarrow 21$; $10 \rightarrow 35$. Quotients : $14 \div 4 = 3,5$; $21 \div 6 = 3,5$;

$35 \div 10 = 3,5$. C'est bien un tableau de proportionnalité, de coefficient 3,5.

Compléter un tableau : quatre méthodes

- **Le coefficient** : on multiplie par le coefficient (ou on divise pour faire le chemin inverse).
- **La linéarité multiplicative** : si on multiplie une valeur par un nombre, on multiplie l'autre par le même nombre.
- **La linéarité additive** : la somme de deux colonnes donne une nouvelle colonne.
- **Le passage à l'unité** : on cherche la valeur pour 1, puis on multiplie.

Exemple résolu 7 mètres de ruban coûtent 10,50 €. Combien coûtent 12 mètres ?

Passage à l'unité : 1 m coûte $10,50 \div 7 = 1,50$ €, donc 12 m coûtent $12 \times 1,50 = \mathbf{18 \text{ €}}$.

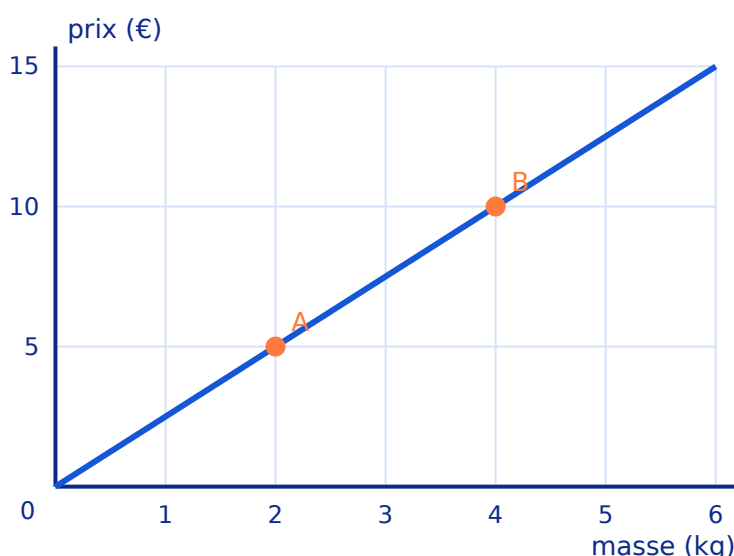
Linéarité additive : $12 = 7 + 5$; 5 m coûtent $5 \times 1,50 = 7,50$ € ; au total $10,50 + 7,50 = 18$ €.

Quatrième proportionnelle (produit en croix) Dans un tableau de proportionnalité, les produits en croix sont égaux : si $a \rightarrow b$ et $c \rightarrow d$, alors $a \times d = b \times c$. On en déduit la valeur manquante : $d = \mathbf{b \times c/a}$.

Exemple : $4 \rightarrow 14$ et $9 \rightarrow ?$ On calcule $14 \times 9 \div 4 = 126 \div 4 = \mathbf{31,5}$.

3. Représentation graphique

Graphique d'une situation de proportionnalité Deux grandeurs sont proportionnelles si et seulement si les points qui les représentent dans un repère sont **alignés avec l'origine du repère**, c'est-à-dire sur une **droite passant par l'origine**.



Prix des pommes en fonction de la masse. Les points A (2 ; 5) et B (4 ; 10) sont sur une droite qui passe par l'origine : le prix est proportionnel à la masse.

Lire le coefficient sur le graphique On lit les coordonnées d'un point (autre que l'origine) de la droite : le coefficient est l'ordonnée divisée par l'abscisse. Ici, pour le point A : $5 \div 2 = 2,5$ (€ par kg).

Attention Une droite qui ne passe pas par l'origine, ou une courbe qui n'est pas une droite, ne représente pas une situation de proportionnalité.

4. Les pourcentages : prendre une part, calculer une proportion

Pourcentage Un pourcentage est une proportion exprimée « sur 100 ». Dire que $t\%$ des élèves aiment le sport, c'est dire que sur 100 élèves, t aiment le sport : $t\% = t/100$.

Calculer $t\%$ d'une quantité On multiplie la quantité par **$t/100$** . Exemple : 35% de 260 = $260 \times 0,35 = 91$. Quelques raccourcis : $50\% =$ la moitié ; $25\% =$ le quart ; $10\% =$ on divise par 10 ; $75\% =$ trois quarts.

Exprimer une proportion en pourcentage On divise la partie par le total, puis on multiplie par 100. Exemple : 18 filles sur 45 élèves : $18 \div 45 = 0,4$ donc 40% .

Astuce Calculer un pourcentage, c'est utiliser la proportionnalité : 40% de 45 se lit dans le tableau $100 \rightarrow 45$ et $40 \rightarrow ?$; on trouve $40 \times 45 \div 100 = 18$.

5. Hausses et baisses en pourcentage

Coefficient multiplicateur Une **hausse** de $t\%$ revient à multiplier par **$1 + t/100$** . Une **baisse** de $t\%$ revient à multiplier par **$1 - t/100$** .
Exemples : $+15\% \rightarrow \times 1,15$; $-30\% \rightarrow \times 0,70$; $+8\% \rightarrow \times 1,08$; $-5\% \rightarrow \times 0,95$.

Exemple résolu Un jeu vidéo à 45 € est soldé à -20% . Prix soldé : $45 \times 0,80 = 36$ €. (Méthode en deux temps : réduction $45 \times 0,20 = 9$ €, puis $45 - 9 = 36$ €.)

Calculer un taux d'évolution Taux = **valeur finale – valeur initiale**/valeur initiale $\times 100$. Si le résultat est positif, c'est une hausse ; s'il est négatif, c'est une baisse.
Exemple : un abonnement passe de 16 € à 18 €. $2 \div 16 = 0,125$: hausse de **$12,5\%$** .

Retrouver la valeur initiale On **divise** par le coefficient multiplicateur. Exemple : après une hausse de 25% , un prix est de 50 € ; le prix initial est $50 \div 1,25 = 40$ €.

Piège Après une hausse de 25% , on ne retrouve pas le prix de départ en retirant 25% au prix final : $50 - 12,50 = 37,50$ € et non 40 €. Il faut diviser par 1,25.

6. Évolutions successives et pourcentages de pourcentages

Évolutions successives Quand plusieurs évolutions se suivent, on **multiplie les coefficients** ; les taux ne s'additionnent pas.

Exemple Un prix augmente de 10 % puis baisse de 10 %. Coefficient global : $1,10 \times 0,90 = 0,99$. Le prix final est 1 % **plus bas** qu'au départ. (Pas le même prix !)

Pourcentage d'un pourcentage Prendre p % de q % d'une quantité, c'est multiplier par **p/100** puis par **q/100**.

Exemple Dans un club de 200 membres, 60 % sont des filles et 25 % des filles font de la natation. Nombre de filles : $200 \times 0,6 = 120$; nageuses : $120 \times 0,25 = 30$. Part des nageuses dans le club : $0,6 \times 0,25 = 0,15 = \mathbf{15\%}$ (et 15 % de 200 = 30).

7. Les échelles

Échelle Sur une carte ou un plan, les longueurs réelles sont proportionnelles aux longueurs dessinées. L'**échelle** est le coefficient qui permet de passer des longueurs sur le plan aux longueurs réelles, exprimées avec la **même unité**. Une échelle de 1/25 000 signifie : 1 cm sur le plan représente 25 000 cm dans la réalité, soit 250 m.

Utiliser une échelle Longueur réelle = longueur sur le plan $\times$ dénominateur de l'échelle (et on convertit). Longueur sur le plan = longueur réelle $\div$ dénominateur. Exemple : à l'échelle 1/50 000, 3,2 cm sur la carte représentent $3,2 \times 50\,000 = 160\,000$ cm = 1 600 m = **1,6 km**.

Astuce Convertis toujours en centimètres avant de calculer, puis repasse en mètres ou en kilomètres : 100 000 cm = 1 km.

Attention Plus le nombre du dénominateur est grand, plus la carte est « petite » : 1/1 000 000 montre une région entière, 1/1 000 un quartier.

8. Vitesses et débits

Vitesse moyenne À vitesse constante, la distance parcourue est proportionnelle à la durée. La vitesse moyenne v est le coefficient de proportionnalité : $v = \mathbf{d/t}$, donc $d = v \times t$ et $t = \mathbf{d/v}$.

Exemple Un train parcourt 270 km en 1 h 30 min. Durée : 1,5 h. Vitesse : $270 \div 1,5 = \mathbf{180\ km/h}$. À cette vitesse, il met $90 \div 180 = 0,5$ h = 30 min pour faire 90 km.

Durées Une durée n'est pas un nombre décimal comme les autres : 1 h 30 min = 1,5 h
Fiche en ligne : maths-facile.eu/proportionnalite-et-pourcentages-cours-4eme/ · Cours, exercices et contrôles corrigés

(et non 1,30 h). $20 \text{ min} = \mathbf{20/60 \text{ h} = 1/3 \text{ h}}$.

Convertir des vitesses $1 \text{ m/s} = 3,6 \text{ km/h}$ (car $1 \text{ m/s} = 3\,600 \text{ m en } 1 \text{ h} = 3,6 \text{ km en } 1 \text{ h}$). Pour passer de m/s à km/h on multiplie par 3,6 ; pour passer de km/h à m/s on divise par 3,6. Exemple : $54 \text{ km/h} = 54 \div 3,6 = 15 \text{ m/s}$.

Débit Le **débit** d'un robinet, d'une pompe ou d'un fleuve est le volume écoulé par unité de temps : $\text{débit} = \mathbf{\text{volume/durée}}$. Il s'exprime par exemple en litres par minute (L/min) ou en m^3/h . Si le débit est constant, le volume écoulé est proportionnel à la durée.

Exemple Un robinet a un débit de 8 L/min. Pour remplir un seau de 12 L : $12 \div 8 = 1,5$ min, soit 1 min 30 s. En 20 min, il verse $8 \times 20 = 160 \text{ L}$.

À retenir

- Deux grandeurs sont proportionnelles si on passe de l'une à l'autre en multipliant toujours par le même coefficient.
- Pour compléter un tableau : coefficient, linéarité, passage à l'unité ou produit en croix.
- Graphique : une situation de proportionnalité est représentée par des points alignés avec l'origine.
- $t \%$ d'une quantité : on multiplie par **$t/100$** . Proportion : $\text{partie} \div \text{total} \times 100$.
- Hausse de $t \%$: $\times (1 + \mathbf{t/100})$; baisse de $t \%$: $\times (1 - \mathbf{t/100})$. Pour revenir en arrière, on divise.
- Évolutions successives : on multiplie les coefficients, on n'additionne pas les taux.
- Échelle : $\text{longueur réelle} = \text{longueur sur le plan} \times \text{dénominateur}$; même unité obligatoire.
- Vitesse : $v = \mathbf{d/t}$; $1 \text{ m/s} = 3,6 \text{ km/h}$. Débit = $\text{volume} \div \text{durée}$.