

Proportions et évolutions

Cours de maths - 2de

Remises en magasin, hausse du prix de l'énergie, croissance d'une population, résultats d'un sondage : les **pourcentages** sont partout, et on les utilise souvent mal. En 2de, tu vas apprendre à les manier avec rigueur : calculer des **proportions**, enchaîner des **évolutions**, trouver l'évolution qui annule une autre, et suivre une grandeur grâce aux **indices**. Un seul outil servira à tout : le **coefficient multiplicateur**.

Rappels de collège

Un pourcentage est une fraction de dénominateur 100 : $35 \% = \frac{35}{100} = 0,35$. Prendre 35 % d'une quantité, c'est la multiplier par 0,35. Pour passer d'un nombre décimal à un pourcentage, on multiplie par 100 : $0,07 = 7 \%$.

1. Proportion et pourcentage

Proportion

Si un ensemble (la **population**) compte N éléments et qu'une partie (la **sous-population**) en compte n , la **proportion** de la partie dans l'ensemble est le quotient n/N . On l'exprime sous forme de fraction, de nombre décimal ou de pourcentage. Elle est toujours comprise entre 0 et 1 (entre 0 % et 100 %) quand la partie est contenue dans l'ensemble.

Exemple

Dans une chorale de 45 personnes, 18 sont des ténors. La proportion de ténors est $\frac{18}{45} = \frac{2}{5} = 0,4 = 40 \%$.

Méthode : les deux sens du calcul

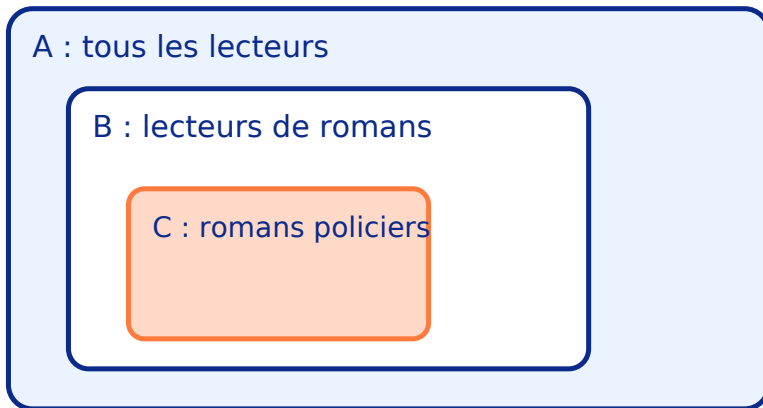
- **Trouver la partie** : partie = proportion $\times$ total. Exemple : 30 % de 250 élèves, c'est $0,30 \times 250 = 75$ élèves.
- **Trouver le total** : total = partie $\div$ proportion. Exemple : 75 élèves représentent 30 % du total, donc le total est $75 \div 0,30 = 250$.

Piège

Une proportion se rapporte toujours à un ensemble de **référence**. « 40 % des élèves sont des filles » et « 40 % des filles font du judo » ne parlent pas du même ensemble de référence : ne les mélange pas !

2. Proportion d'une proportion

Il arrive que l'on cherche la part d'une partie. Imagine trois ensembles **emboîtés** : un ensemble A, une partie B de A, puis une partie C de B.



Propriété (proportion de proportion)

Si B représente une proportion p_1 de A et si C représente une proportion p_2 de B, alors C représente la proportion $p_1 \times p_2$ de A.

Justification. Si A compte N éléments, B en compte $p_1 \times N$, puis C en compte $p_2 \times (p_1 \times N) = (p_1 \times p_2) \times N$.

Exemple

Dans une bibliothèque, 60 % des lecteurs empruntent des romans, et 25 % des lecteurs de romans choisissent des policiers. Proportion de lecteurs de policiers : $0,60 \times 0,25 = 0,15$, soit **15 %** (et non 85 % ni 35 %).

Points de pourcentage

Quand un taux passe de 12 % à 15 %, il augmente de **3 points de pourcentage**. Mais ce n'est pas une hausse de 3 % : la hausse *relative* est $3/12 = 25 \%$. Les « points » comparent deux pourcentages, le « % » exprime une évolution relative.

3. Variation absolue, variation relative, taux d'évolution

Une grandeur passe d'une **valeur initiale** V_i à une **valeur finale** V_f .

Variations

- La **variation absolue** est $V_f - V_i$ (elle s'exprime dans l'unité de la grandeur).
- La **variation relative**, ou **taux d'évolution**, est $t = \frac{V_f - V_i}{V_i}$ (elle n'a pas d'unité ; on l'exprime en pourcentage).

Si $t > 0$, c'est une **hausse** ; si $t < 0$, c'est une **baisse**.

Exemple

Un abonnement passe de 40 € à 46 €. Variation absolue : $46 - 40 = +6$ €. Taux d'évolution : $\frac{6}{40} = 0,15$, soit **+15 %**. Un autre passe de 80 € à 68 € : variation -12 €, taux $\frac{-12}{80} = -0,15$, soit **-15 %**.

Piège

On divise toujours par la valeur **initiale**, jamais par la finale. Et un taux ne s'additionne pas à n'importe quoi : de 40 à 46 on a +15 %, mais de 46 à 40 on n'a pas -15 % (on calcule $\frac{-6}{46} \approx -13 \%$).

4. Le coefficient multiplicateur

Propriété

Augmenter une valeur de t % revient à la multiplier par **$c = 1 + t/100$** .

Réciproquement, si une grandeur est multipliée par c , son taux d'évolution est **$t = c - 1$** . Le nombre c est le **coefficient multiplicateur**.

Justification. $V_f = V_i + t \times V_i = V_i \times (1 + t)$, avec t écrit sous forme décimale.

Évolution	Calcul	Coefficient multiplicateur
hausse de 8 %	$1 + 0,08$	1,08
baisse de 8 %	$1 - 0,08$	0,92
hausse de 100 % (doubler)	$1 + 1$	2
baisse de 50 % (diviser par 2)	$1 - 0,5$	0,5
hausse de 250 %	$1 + 2,5$	3,5

Méthode

1. Écris le coefficient : $c = 1 + t$ (hausse) ou $1 - |t|$ (baisse).
2. Calcule $V_f = c \times V_i$.

Exemple : un jeu à 45 € baisse de 20 % : $c = 0,80$ et $45 \times 0,80 = \mathbf{36 \text{ €}}$.

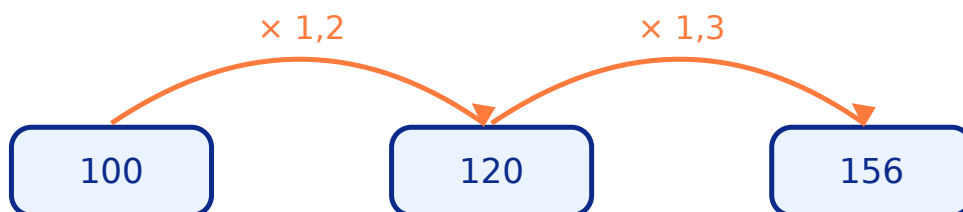
Astuce

Si $c > 1$, la grandeur augmente ; si $0 < c < 1$, elle diminue. Un coefficient ne peut jamais être négatif dans ce chapitre : une baisse de 100 % donne $c = 0$ (la valeur s'annule).

5. Évolutions successives

Propriété

Quand plusieurs évolutions se suivent, les coefficients multiplicateurs **se multiplient**. Si c_1 puis c_2 s'appliquent, le coefficient global est $\mathbf{c = c_1 \times c_2}$ et le taux global est $c - 1$.



Exemple

Un loyer augmente de 20 % puis de 30 %. Coefficient global : $1,2 \times 1,3 = 1,56$. Le taux global est $1,56 - 1 = \mathbf{+56 \text{ %}}$, et non $20 \text{ %} + 30 \text{ %} = 50 \text{ %}$. Sur le schéma, on part de 100 pour mieux lire le résultat.

Les taux ne s'additionnent pas

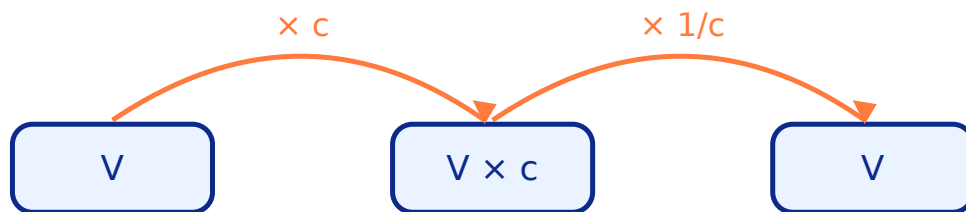
La seconde évolution s'applique à la valeur *déjà modifiée*. Une baisse de 10 % suivie d'une baisse de 10 % donne $0,9 \times 0,9 = 0,81$, soit -19 % et non -20 % .

Les évolutions peuvent être de sens contraire : $+50 \text{ %}$ puis -50 % donne $1,5 \times 0,5 = 0,75$, soit $\mathbf{-25 \text{ %}}$. On ne revient pas au point de départ !

6. Évolution réciproque

Évolution réciproque

L'évolution réciproque d'une évolution de coefficient c est l'évolution qui ramène à la valeur de départ. Son coefficient est $c_r = 1/c$ (avec $c \neq 0$) et son taux est $t_r = c_r - 1$.



Justification. On veut $c \times c_r = 1$ pour que le résultat soit V , d'où $c_r = 1/c$.

Exemple

Une rivière monte de 25 % : $c = 1,25$. Pour revenir au niveau de départ, il faut $c_r = 1/1,25 = 0,8$, soit une **baisse de 20 %**. Dans l'autre sens, une baisse de 20 % se « rattrape » par une hausse de 25 % ($1 \div 0,8 = 1,25$).

Piège

L'évolution réciproque d'une hausse de 25 % n'est *pas* une baisse de 25 %. Plus la hausse est forte, plus la baisse nécessaire est (en pourcentage) importante, mais elle reste toujours inférieure à 100 %.

Méthode : retrouver la valeur initiale

Si on connaît V_f et le taux t : $V_i = V_f / c$. Exemple : après une hausse de 8 %, un article coûte 54 € ; avant, il coûtait $54 \div 1,08 = 50$ €. On ne retranche jamais 8 % de 54 !

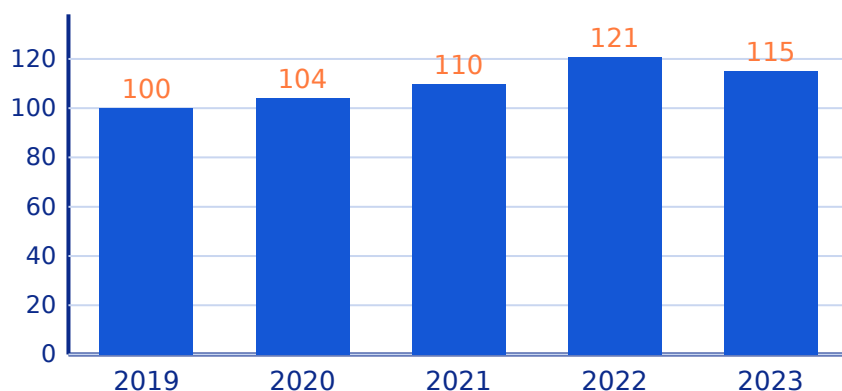
7. Indices en base 100

Indice

Choisir une **base 100**, c'est décider qu'une valeur de référence (à une date donnée) correspond à l'indice 100. L'indice d'une autre valeur V est alors $I = V/V_{\text{ref}} \times 100$. Un indice est un nombre sans unité.

Les indices permettent de comparer rapidement des évolutions : de l'indice 100 à l'indice 125, la grandeur a augmenté de 25 %. En général, de l'indice I_1 à l'indice I_2 , le coefficient

est I_2/I_1 .



Exemple

Sur le diagramme, entre 2019 (indice 100) et 2022 (indice 121), la hausse est de +21 %. Entre 2022 et 2023 : $115/121 \approx 0,950$, soit une baisse d'environ **5 %**. Attention : on ne compare pas 2022 et 2023 avec la différence $121 - 115 = 6$ « points », mais par le quotient, car la base 100 est en 2019.

Piège

Entre deux dates quelconques, la différence d'indices n'est un taux d'évolution *que si la date de départ est la base 100*.

8. Résoudre un problème : choisir le bon outil

Je dois...	Je fais...
calculer une partie d'un tout	proportion $\times$ total
calculer la part d'une partie	multiplier les deux proportions
calculer une valeur après évolution	$V_f = c \times V_i$
trouver le taux entre deux valeurs	$t = (V_f - V_i) \div V_i$
enchaîner plusieurs évolutions	$c = c_1 \times c_2 \times \dots$
revenir à la valeur de départ	coefficient $1 \div c$; ou $V_i = V_f \div c$

Exemple complet

Un vélo coûte 600 €. Le magasin applique -10% puis -20% supplémentaires. Coefficient global : $0,9 \times 0,8 = 0,72$. Prix final : $600 \times 0,72 = \mathbf{432\ €}$. Le taux global est -28% , donc les deux remises ne valent pas -30% . Pour retrouver les 600 € à partir de 432 €, il faudrait une hausse de $1/0,72 - 1 \approx 0,3889$, soit environ **+38,9 %**.

Mathbot

Bip bip ! Avant de calculer, demande-toi toujours : « Par quoi je multiplie ? » Si tu sais écrire le coefficient multiplicateur, tu as déjà presque gagné !

À retenir

- Proportion = partie $\div$ total ; partie = proportion $\times$ total ; total = partie $\div$ proportion.
- Proportion d'une proportion : on **multiplie** les proportions ($0,6 \times 0,25 = 0,15$).
- Taux d'évolution : $t = (V_f - V_i) \div V_i$; on divise par la valeur **initiale**.
- Coefficient multiplicateur : $c = 1 + t$; $V_f = c \times V_i$.
- Évolutions successives : les coefficients se **multiplient**, les taux ne s'additionnent pas.
- Évolution réciproque : coefficient $1 \div c$; une hausse de 25 % se compense par une baisse de 20 %.
- Valeur initiale : $V_i = V_f \div c$.
- Indice base 100 : $I = V \div V_{\text{ref}} \times 100$; comparer deux indices par leur quotient.
- Différencier « points de pourcentage » (écart entre deux taux) et « % » (variation relative).