

Puissances

Cours de maths - 4ème

Écrire $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ devient vite pénible, et que dire d'un produit de cent facteurs ! Les **puissances** sont une écriture courte pour ces produits. Dans ce chapitre, tu apprends à les calculer, à utiliser des exposants négatifs, à maîtriser les **puissances de 10** et à écrire les très grands ou très petits nombres en **notation scientifique**.

Rappels utiles avant de commencer

- Multiplier par 10, 100, 1 000 décale la virgule vers la droite ; diviser par 10, 100, 1 000 la décale vers la gauche.
- Dans un calcul, les parenthèses passent d'abord, puis les multiplications et divisions, enfin les additions et soustractions.
- Le produit de deux nombres de même signe est positif ; de signes contraires, il est négatif.
- L'inverse d'un nombre non nul a est $1/a$: le produit d'un nombre par son inverse vaut 1.

1. Puissance d'exposant positif

Puissance Soit a un nombre relatif et n un entier positif non nul. Le produit de n facteurs tous égaux à a se note a^n :

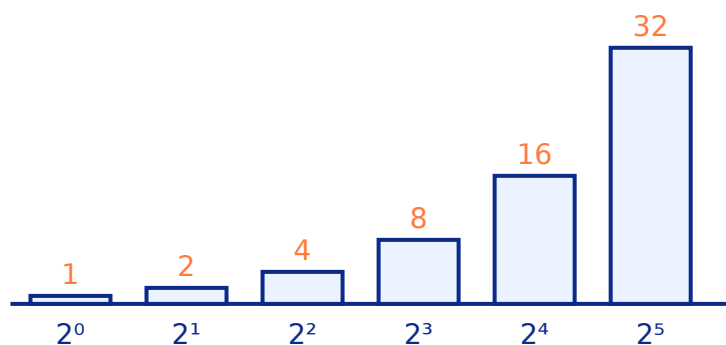
$$a^n = a \times a \times \dots \times a \text{ (} n \text{ facteurs).}$$

On lit « a exposant n » ou « a puissance n ». Le nombre n est l'**exposant**.

Cas particuliers $a^1 = a$; $a^0 = 1$ (pour a non nul, c'est une convention) ; a^2 se lit « a au carré » ; a^3 se lit « a au cube ».

Exemples $6^3 = 6 \times 6 \times 6 = 216$; $2^7 = 128$; $0,2^3 = 0,2 \times 0,2 \times 0,2 = 0,008$; $15^0 = 1$; $15^1 = 15$.

Les puissances de 2 grandissent très vite : à chaque cran, on double.



Piège classique 2^5 ne vaut pas $2 \times 5 = 10$! C'est $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$. L'exposant dit *combien de fois* on écrit le nombre dans le produit, il ne multiplie pas.

2. Le signe d'une puissance

Propriété

- Si a est positif, a^n est positif.
- Si a est négatif et n pair, a^n est positif (les signes « - » s'associent deux par deux).
- Si a est négatif et n impair, a^n est négatif (il reste un signe « - » seul).

Exemples $(-2)^4 = (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) = 16$ (positif, exposant pair) ; $(-2)^5 = -32$ (négatif, exposant impair).

Les parenthèses changent tout $(-3)^2 = (-3) \times (-3) = 9$, alors que $-3^2 = -(3 \times 3) = -9$. Sans parenthèses, l'exposant ne concerne que le 3 ; le signe « - » est appliqué après.

3. Puissance d'exposant négatif

Exposant négatif Pour tout nombre a non nul et tout entier n positif, $a^{-n} = (1) \div (a^n)$. En particulier $a^{-1} = 1/a$: c'est l'**inverse** de a .

Pourquoi cette définition ? Regarde la suite des puissances de 2 : en descendant l'exposant de 1, on *divise* par 2.

Exposant	3	2	1	0	-1	-2	-3
Puissance de 2	8	4	2	1	1/2	1/4	1/8

Exemples $3^{-2} = (1) \div (3^2) = 1/9$; $5^{-3} = 1/125$; $(-2)^{-3} = (1) \div ((-2)^3) = (-1) \div 8 = -1/8$; $4^{-1} = 1/4 = 0,25$.

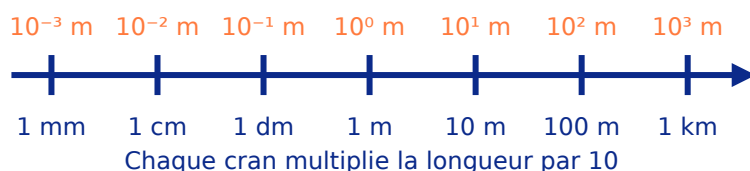
Un exposant négatif ne rend pas le nombre négatif $2^{-3} = 1/8$ est positif. Le signe d'une puissance dépend du signe de la base, jamais du signe de l'exposant.

4. Les puissances de 10

Définition et lecture Pour tout entier n positif : 10^n s'écrit 1 suivi de n zéros ; $10^{-n} = (1) \div (10^n)$ s'écrit 0,0...01 avec n chiffres après la virgule, le dernier étant le 1. Et $10^0 = 1$.

Puissance	10^5	10^3	10^1	10^0	10^{-1}	10^{-2}	10^{-4}
Écriture décimale	100 000	1 000	10	1	0,1	0,01	0,000 1

Les longueurs de la vie courante s'alignent très bien sur ces puissances.



Multiplier par une puissance de 10 Multiplier par 10^n décale la virgule de n rangs vers la droite ; multiplier par 10^{-n} la décale de n rangs vers la gauche.

Exemples $4,07 \times 10^3 = 4\,070$; $52,6 \times 10^{-2} = 0,526$; $0,009 \times 10^5 = 900$; $31 \times 10^{-4} = 0,003\,1$.

5. Les règles de calcul sur les puissances

Pourquoi $3^4 \times 3^2 = 3^6$? Parce que $(3 \times 3 \times 3 \times 3) \times (3 \times 3)$ contient en tout 6 facteurs 3. De même pour les autres règles.

Règles (pour a non nul et m, p entiers relatifs)

- **Produit** : $a^m \times a^p = a^{m+p}$
- **Quotient** : $(a^m) \div (a^p) = a^{m-p}$
- **Puissance de puissance** : $(a^m)^p = a^{m \times p}$

On a aussi, pour deux nombres de même exposant : $(a \times b)^n = a^n \times b^n$.

Méthode On écrit d'abord la règle utilisée, puis on calcule l'exposant **avec soin** (les parenthèses autour d'un exposant négatif évitent les erreurs de signe).

$$10^{-4} \times 10^9 = 10^{-4+9} = 10^5$$

$$(10^2) \div (10^{-5}) = 10^{2-(-5)} = 10^7$$

$$(10^{-3})^4 = 10^{(-3) \times 4} = 10^{-12}$$

$$(7^3) \div (7^8) = 7^{3-8} = 7^{-5}$$

Pas de règle pour la somme $10^3 + 10^2$ n'est pas 10^5 ! On calcule : $1\,000 + 100 = 1\,100$. Les règles ne marchent que pour des **produits** et des **quotients**. Attention aussi : $2^3 \times 3^3$ ne se simplifie pas en additionnant les exposants, car les bases sont différentes (on peut écrire $(2 \times 3)^3 = 6^3$).

Astuce de Mathbot Si tu hésites sur une règle, teste-la sur un petit exemple : $2^2 \times 2^3 = 4 \times 8 = 32 = 2^5$. Les exposants s'additionnent, bingo !

6. Calculs avec priorités

Ordre des opérations On calcule dans l'ordre : **parenthèses**, puis **puissances**, puis multiplications et divisions, enfin additions et soustractions.

Exemple résolu

$$A = 4 + 3 \times 2^3 - 5$$

$$A = 4 + 3 \times 8 - 5 \text{ (la puissance d'abord)}$$

$$A = 4 + 24 - 5 = 23$$

$$B = (7 - 9)^3 \times 5 = (-2)^3 \times 5 = -8 \times 5 = -40$$

7. L'écriture scientifique

Notation scientifique Tout nombre décimal non nul peut s'écrire $a \times 10^n$ où n est un entier relatif et a un nombre décimal dont la partie entière est un seul chiffre non nul ($1 \leq a < 10$ pour un nombre positif).

Écrire un nombre en notation scientifique

1. Place la virgule après le premier chiffre non nul : tu obtiens a .
2. Compte de combien de rangs tu as déplacé la virgule : c'est la valeur absolue de n .
3. Si le nombre de départ était grand (≥ 10), n est positif ; s'il était petit (< 1), n est négatif.

Exemple : $83\,200\,000 = 8,32 \times 10^7$ (virgule déplacée de 7 rangs) ; $0,000\,46 = 4,6 \times 10^{-4}$ (4 rangs).

Quand le nombre n'est pas déjà « bien placé »

$$47,5 \times 10^6 = 4,75 \times 10 \times 10^6 = 4,75 \times 10^7.$$

$$0,031 \times 10^{-2} = 3,1 \times 10^{-2} \times 10^{-2} = 3,1 \times 10^{-4}.$$

Sur la calculatrice Quand un résultat est trop grand ou trop petit, l'écran affiche par exemple « 3,5E9 » ou « 3,5 × 10 9 » : cela signifie $3,5 \times 10^9$. Le « E » veut dire « fois dix puissance ».

8. Comparer et calculer en notation scientifique

Comparer deux nombres positifs Une fois les deux nombres en notation scientifique : on compare d'abord les **exposants** (le plus grand exposant donne le plus grand nombre) ; si les exposants sont égaux, on compare les nombres a .

Exemples : $2,4 \times 10^{-2} > 9,1 \times 10^{-3}$ car $-2 > -3$. Et $6,3 \times 10^5 < 6,8 \times 10^5$ car $6,3 < 6,8$.

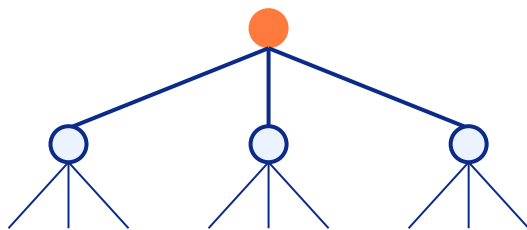
Calculer un produit ou un quotient On regroupe d'un côté les nombres décimaux, de l'autre les puissances de 10, on calcule chaque groupe puis on remet le résultat en notation scientifique.

$$(5 \times 10^4) \times (6 \times 10^{-7}) = 5 \times 6 \times 10^4 \times 10^{-7} = 30 \times 10^{-3} = 3 \times 10^{-2}.$$

$$(8,4 \times 10^5) \div (2 \times 10^{-3}) : \text{on écrit } (8,4 \div 2) \times (10^5 \div 10^{-3}) = 4,2 \times 10^8.$$

Dernière vérification Après un calcul, regarde si le nombre devant la puissance de 10 est bien compris entre 1 et 10. Un résultat comme 30×10^{-3} n'est pas encore en notation scientifique.

Un exemple dans la vie : une personne en prévient 3 autres, qui en préviennent chacune 3 autres... Le nombre de personnes prévenues à chaque étape est une puissance de 3.



Étape 0 : 1 personne · étape 1 : 3 · étape 2 : 9

À retenir

- a^n est le produit de n facteurs égaux à a ; $a^0 = 1$; $a^1 = a$.
- Base négative : signe « + » si l'exposant est pair, « - » s'il est impair. Attention à $(-3)^2 = 9$ et $-3^2 = -9$.
- $a^{-n} = (1) \div (a^n)$: c'est l'inverse de a^n .
- $10^3 = 1\ 000$; $10^{-3} = 0,001$.
- $a^m \times a^p = a^{m+p}$; $(a^m) \div (a^p) = a^{m-p}$; $(a^m)^p = a^{m \times p}$. Rien de tel pour une somme.
- Notation scientifique : $a \times 10^n$ avec $1 \leq a < 10$ et n entier relatif.
- Pour comparer : exposants d'abord, puis nombres a .