

Puissances

Cours de maths - 5ème

Écrire $5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5$ est long, et un produit de vingt facteurs serait presque impossible à lire ! Les **puissances** sont une écriture courte pour ces produits où le même nombre se répète. Dans ce chapitre, tu apprends à les lire, à les calculer, à les placer correctement dans un calcul, à les utiliser avec des lettres, et à maîtriser les **puissances de 10** pour écrire de grands nombres.

Rappels utiles avant de commencer

- Multiplier, c'est ajouter plusieurs fois le même nombre : $4 \times 3 = 3 + 3 + 3 + 3$.
- Dans un calcul, on effectue d'abord les parenthèses, puis les multiplications et les divisions, enfin les additions et les soustractions.
- Multiplier un nombre décimal par 10, 100 ou 1 000 décale sa virgule de 1, 2 ou 3 rangs vers la droite.
- Une aire s'exprime en cm^2 , m^2 ... ; un volume s'exprime en cm^3 , m^3 ...

1. La notation puissance

Puissance d'un nombre Soit a un nombre et n un entier supérieur ou égal à 2. Le produit de n facteurs tous égaux à a se note a^n :

$$a^n = a \times a \times \dots \times a \text{ (} n \text{ facteurs).}$$

On lit « a exposant n » ou « a puissance n ». Le nombre a est la **base** et le petit nombre n est l'**exposant**. Par convention, $a^1 = a$.

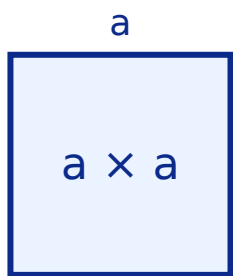
Exemples

- $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^5$: on lit « trois exposant cinq » ; la base est 3 et l'exposant est 5.
- $0,2 \times 0,2 \times 0,2 = 0,2^3$.
- $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = (\frac{1}{2})^2$.

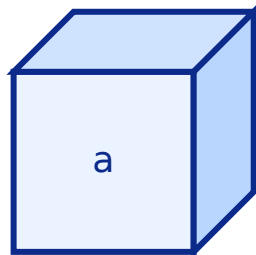
Le piège numéro 1 a^n n'est **pas** égal à $n \times a$. Par exemple $4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$, alors que $4 \times 3 = 12$. L'exposant dit *combien de fois* on écrit la base dans le produit, il ne multiplie pas la base.

2. Les carrés et les cubes

Carré et cube Le **carré** d'un nombre a est $a^2 = a \times a$ (on lit « a au carré »). Le **cube** d'un nombre a est $a^3 = a \times a \times a$ (on lit « a au cube »).



aire = a^2



volume = $a \times a \times a = a^3$

Un carré de côté a a pour aire a^2 . Un cube d'arête a a pour volume a^3 .

À savoir par cœur Les carrés des entiers de 1 à 12 :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
n^2	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144

Et les cubes les plus courants :

n	1	2	3	4	5	10
n^3	1	8	27	64	125	1 000

Exemple Un carré de côté 9 cm a pour aire $9^2 = 81 \text{ cm}^2$. Un cube d'arête 3 dm a pour volume $3^3 = 27 \text{ dm}^3$. Remarque l'unité : on obtient des cm^2 pour une aire (deux longueurs multipliées) et des dm^3 pour un volume (trois longueurs multipliées).

3. Calculer une puissance

Méthode : calculer a^n

1. Écris la puissance sous forme de produit de n facteurs égaux à a .
2. Calcule de gauche à droite, un facteur après l'autre.
3. Vérifie le nombre de facteurs : il doit être égal à l'exposant.

Exemples résolus

$$2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 4 \times 2 \times 2 \times 2 = 8 \times 2 \times 2 = 16 \times 2 = 32.$$

$$0,5^2 = 0,5 \times 0,5 = 0,25.$$

$$(2/3)^2 = 2/3 \times 2/3 = 4/9.$$

$1^8 = 1 \times 1 \times \dots \times 1 = 1$: une puissance de 1 vaut toujours 1.

Astuce de Mathbot Pour les grandes puissances, regroupe : $2^6 = 2^3 \times 2^3 = 8 \times 8 = 64$. Et sur une calculatrice, cherche la touche x^2 (carré) ou la touche d'exposant : tu gagnes du temps, mais il faut savoir faire à la main !

Attention aux petits nombres Avec un décimal, le carré peut être plus petit que le nombre : $0,1^2 = 0,01$ et $0,5^2 = 0,25$. Ce n'est pas une erreur : multiplier par un nombre inférieur à 1 diminue le résultat.

4. Les puissances dans un calcul

Priorités opératoires Dans un calcul, on effectue dans cet ordre : 1) ce qui est entre **parenthèses** ; 2) les **puissances** ; 3) les multiplications et les divisions, de gauche à droite ; 4) les additions et les soustractions, de gauche à droite.

Exemples résolus

$$A = 4 + 3 \times 2^3 = 4 + 3 \times 8 = 4 + 24 = 28.$$

$$B = (4 + 3 \times 2)^3 = (4 + 6)^3 = 10^3 = 1\,000.$$

$$C = 5^2 - 2^4 = 25 - 16 = 9.$$

Avec ou sans parenthèses ? $3 \times 2^2 = 3 \times 4 = 12$, mais $(3 \times 2)^2 = 6^2 = 36$.

L'exposant ne porte que sur le nombre juste devant lui, sauf si une parenthèse entoure plusieurs nombres.

5. Valeur d'une expression littérale

Une **expression littérale** contient des lettres qui représentent des nombres. Pour calculer sa valeur, on remplace chaque lettre par le nombre donné, puis on respecte les priorités.

Méthode

1. Réécris l'expression en remplaçant la lettre par sa valeur, entre parenthèses si besoin.
2. Rétablis les signes $\times$ qui étaient cachés : $3x^2$ signifie $3 \times x^2$.
3. Calcule les puissances, puis les produits, puis les sommes.

Exemple résolu

Calculer $E = 2x^3 - 5$ pour $x = 3$, puis pour $x = 4$.

Pour $x = 3$: $E = 2 \times 3^3 - 5 = 2 \times 27 - 5 = 54 - 5 = 49$.

Pour $x = 4$: $E = 2 \times 4^3 - 5 = 2 \times 64 - 5 = 128 - 5 = 123$.

$3x^2$ n'est pas $(3x)^2$ Pour $x = 2$: $3x^2 = 3 \times 2^2 = 3 \times 4 = 12$, alors que $(3x)^2 = (3 \times 2)^2 = 6^2 = 36$. Les deux expressions ne sont pas égales !

x	1	2	3
x^2	1	4	9
$3x^2$	3	12	27
$(3x)^2$	9	36	81

6. Les puissances de 10

Puissance de 10 Une puissance de 10 est un nombre de la forme 10^n : c'est 1 suivi de n zéros.

Puissance de 10	Produit	Écriture décimale	Nombre de zéros
10^1	10	10	1
10^2	10×10	100	2
10^3	$10 \times 10 \times 10$	1 000	3
10^4	$10 \times 10 \times 10 \times 10$	10 000	4
10^6	$10 \times \dots \times 10$ (6 facteurs)	1 000 000	6

Propriétés

- 10^n s'écrit avec le chiffre 1 suivi de n zéros.
- Multiplier un nombre par 10^n décale sa virgule de n rangs vers la droite (on complète avec des zéros si besoin).

Exemples résolus

$$3,7 \times 10^2 = 3,7 \times 100 = 370.$$

$$0,046 \times 10^4 = 460.$$

$$25 \times 10^3 = 25\,000.$$

$$7\,000\,000 = 7 \times 10^6 \text{ (7 suivi de six zéros).}$$

Décomposer un nombre avec des puissances de 10 On écrit chaque chiffre

multiplié par la puissance de 10 correspondant à son rang :

$$4\,306 = 4 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + 0 \times 10 + 6.$$

$$\text{Inversement : } 5 \times 10^4 + 2 \times 10^2 + 9 = 50\,000 + 200 + 9 = 50\,209.$$

7. Résoudre des problèmes avec des puissances

Les puissances apparaissent dès qu'une quantité se **répète en se multipliant** : un nénuphar qui double chaque jour, une rumeur qui se propage, un grand cube formé de petits cubes.

Exemple résolu : la rumeur

Un élève apprend un secret et le répète à 2 camarades. Chacun d'eux le répète à 2 nouveaux camarades, et ainsi de suite. Combien de nouveaux élèves l'apprennent à la 6^e étape ?

À l'étape 1 : 2 élèves ; à l'étape 2 : $2 \times 2 = 4$; à l'étape 3 : $2 \times 2 \times 2 = 8$; ... à l'étape 6 : $2^6 = 64$ élèves.

Exemple résolu : un grand cube

Un cube est formé de petits cubes identiques, avec 3 petits cubes sur chaque arête. Il faut $3 \times 3 \times 3 = 3^3 = 27$ petits cubes.

À retenir

- a^n est le produit de n facteurs égaux à a ; a est la base, n l'exposant ; $a^1 = a$.
- $a^n \neq n \times a$: $2^4 = 16$, pas 8.
- a^2 est le carré de a (aire d'un carré) ; a^3 est le cube de a (volume d'un cube).
- Les carrés de 1 à 12 et les cubes 1, 8, 27, 64, 125, 1 000 se connaissent par cœur.
- Priorités : parenthèses, puis puissances, puis $\times$ et $\div$, puis $+$ et $-$.
- $3x^2 = 3 \times x \times x$, alors que $(3x)^2 = 3x \times 3x$.
- $10^n = 1$ suivi de n zéros ; multiplier par 10^n décale la virgule de n rangs vers la droite.