

Puissances et écriture scientifique

Cours de maths - 3ème

Combien y a-t-il d'étoiles dans une galaxie ? Quelle est la taille d'un virus ? Pour écrire ces nombres gigantesques ou minuscules sans aligner vingt zéros, les mathématiciens utilisent les **puissances**. Dans ce chapitre, tu révises les puissances d'exposant entier relatif, tu découvres les règles de calcul, puis tu apprends à écrire et à comparer des nombres en **écriture scientifique**.

1. Puissances d'exposant positif : rappels

Puissance d'un nombre Soit a un nombre relatif et n un entier positif non nul. Le produit de n facteurs tous égaux à a se note a^n :

$a^n = a \times a \times \dots \times a$ (n facteurs). On lit « a exposant n » ou « a puissance n ». Le nombre n s'appelle l'**exposant**.

Conventions $a^1 = a$ et, pour a non nul, $a^0 = 1$. On lit a^2 « a au carré » et a^3 « a au cube ».

Exemples $6^3 = 6 \times 6 \times 6 = 216$. $2^7 = 128$. $9^0 = 1$. $10^5 = 100\,000$. $(-4)^2 = (-4) \times (-4) = 16$.

Piège classique a^n n'est pas $a \times n$! Par exemple $4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$, et non $4 \times 3 = 12$.

2. Puissances d'exposant négatif

Exposant négatif Soit a un nombre non nul et n un entier positif. a^{-n} est l'**inverse** de a^n :

$a^{-n} = \mathbf{1/a^n}$ c'est-à-dire 1 divisé par ($a \times a \times \dots \times a$) avec n facteurs. En particulier $a^{-1} = \mathbf{1/a}$.

Exemples

$$2^{-3} = \mathbf{1/2 \times 2 \times 2} = \mathbf{1/8}$$

$$5^{-2} = \mathbf{1/25} = 0,04$$

$$10^{-4} = \mathbf{1/10000} = 0,0001$$

$$(-3)^{-2} = \mathbf{1/(-3) \times (-3)} = \mathbf{1/9}$$

Attention Un exposant négatif ne rend pas le nombre négatif ! 2^{-3} vaut **1/8**, qui est

positif. Le signe « moins » de l'exposant signifie « inverse ».

3. Signe d'une puissance et priorités de calcul

Signe d'une puissance

- Si a est positif, a^n est positif.
- Si a est négatif et n pair, a^n est positif.
- Si a est négatif et n impair, a^n est négatif.

Cela reste vrai pour un exposant négatif.

Exemples $(-2)^6 = 64$ est positif (exposant pair). $(-2)^5 = -32$ est négatif (exposant impair). $(-2)^{-3} = -\frac{1}{8}$ est négatif.

Parenthèses indispensables $(-3)^2 = (-3) \times (-3) = 9$, mais $-3^2 = -(3 \times 3) = -9$. L'exposant ne s'applique qu'à ce qui le précède directement : sans parenthèses, c'est le 3 seul qui est élevé au carré.

Ordre des opérations On calcule dans cet ordre : 1) les parenthèses ; 2) les puissances ; 3) les multiplications et divisions ; 4) les additions et soustractions. Exemple : $7 + 3 \times 2^4 = 7 + 3 \times 16 = 7 + 48 = 55$.

4. Les règles de calcul sur les puissances

Propriétés (a et b non nuls, m et n entiers relatifs)

- Produit de même base : $a^m \times a^n = a^{m+n}$
- Quotient de même base : $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
- Puissance d'une puissance : $(a^m)^n = a^{m \times n}$
- Puissance d'un produit : $(a \times b)^n = a^n \times b^n$
- Puissance d'un quotient : $(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$

Pourquoi ça marche ? $3^4 \times 3^2 = (3 \times 3 \times 3 \times 3) \times (3 \times 3)$: on a 6 facteurs égaux à 3, donc c'est 3^6 . On a bien additionné les exposants : $4 + 2 = 6$. Pour le quotient, $\frac{5^4}{5^6} = \frac{5 \times 5 \times 5 \times 5}{5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5} = \frac{1}{5 \times 5} = 5^{-2}$: on retrouve $4 - 6 = -2$.

Méthode : simplifier une expression 1) Repère les puissances qui ont la même base. 2) Applique la règle (on additionne, on soustrait ou on multiplie les exposants). 3) Si les bases sont différentes, essaie de les décomposer ($8 = 2^3$, $25 = 5^2$...). Exemple : $4^3 \times 2^5 = (2^2)^3 \times 2^5 = 2^6 \times 2^5 = 2^{11} = 2048$.

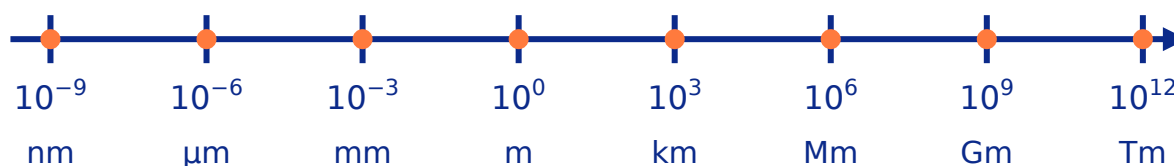
Pas de règle pour la somme $2^3 + 2^4$ n'est pas 2^7 ! On calcule : $8 + 16 = 24$. De

même $2^3 \times 3^2$ ne se simplifie pas en une seule puissance, car les bases sont différentes.

5. Les puissances de 10

Puissances de 10 Pour tout entier n positif : $10^n = 1$ suivi de n zéros ($10^6 = 1\,000\,000$) et $10^{-n} = 0,0\dots01$ avec n chiffres après la virgule, le dernier étant le 1 ($10^{-3} = 0,001$). Enfin $10^0 = 1$.

Multiplier par une puissance de 10 Multiplier par 10^n décale la virgule de n rangs vers la **droite** ; multiplier par 10^{-n} la décale de n rangs vers la **gauche**.
 $3,25 \times 10^4 = 32\,500$ · $740 \times 10^{-5} = 0,0074$.



Quelques puissances de 10 et les unités de longueur associées : un nanomètre vaut 10^{-9} m, un kilomètre 10^3 m.

Préfixes à connaître

Préfixe	nano	micro	milli	kilo	méga	giga	téra
Facteur	10^{-9}	10^{-6}	10^{-3}	10^3	10^6	10^9	10^{12}

Exemple Un disque dur de 2 To (téraoctets) contient 2×10^{12} octets. Un micromètre vaut 10^{-6} m : un cheveu de $80\ \mu\text{m}$ mesure 80×10^{-6} m = 8×10^{-5} m.

6. L'écriture scientifique

Écriture scientifique L'écriture scientifique d'un nombre décimal positif est son écriture sous la forme $a \times 10^n$ où n est un entier relatif et a est un nombre décimal tel que $1 \leq a < 10$ (un seul chiffre non nul avant la virgule).

Méthode : trouver l'écriture scientifique 1) Place la virgule juste après le premier chiffre non nul : tu obtiens a . 2) Compte de combien de rangs tu l'as décalée. 3) Si le nombre de départ est grand (supérieur ou égal à 10), l'exposant est positif ; s'il est petit (inférieur à 1), l'exposant est négatif.

- $4\,380\,000 = 4,38 \times 10^6$ (virgule décalée de 6 rangs).
- $0,000\,072 = 7,2 \times 10^{-5}$ (virgule décalée de 5 rangs vers la droite).
- 126×10^3 : ce n'est pas une écriture scientifique car $126 \geq 10$. On écrit $126 = 1,26 \times 10^2$, donc $126 \times 10^3 = 1,26 \times 10^2 \times 10^3 = 1,26 \times 10^5$.

Comparer deux nombres en écriture scientifique On compare d'abord les **exposants** : le plus grand exposant donne le plus grand nombre. Si les exposants sont égaux, on compare les nombres a .

Exemples : $2,1 \times 10^8 > 9,9 \times 10^7$ (exposant 8 contre 7) ; $3,4 \times 10^{-5} < 6 \times 10^{-5}$ (même exposant, $3,4 < 6$) ; $5 \times 10^{-2} > 8 \times 10^{-4}$.

Sur la calculatrice Mathbot, le robot-coach, te prévient : ta calculatrice écrit $3,2 \times 10^9$ sous la forme « 3,2E9 » ou « $3,2 \times 10^9$ ». Apprends à la reconnaître et à saisir la touche « $\times 10^x$ » ou « EXP ».

7. Calculer avec des écritures scientifiques

Méthode Pour multiplier ou diviser, on traite à part les nombres a et les puissances de 10, puis on remet le résultat en écriture scientifique.

Produit : $(3 \times 10^5) \times (4 \times 10^{-2}) = (3 \times 4) \times (10^5 \times 10^{-2}) = 12 \times 10^3 = \mathbf{1,2 \times 10^4}$.

Quotient : $9 \times 10^7 / 2 \times 10^4 = \mathbf{9/2 \times 10^{7-4} = 4,5 \times 10^3}$.

Somme : on se ramène à la même puissance de 10 : $3 \times 10^5 + 4 \times 10^4 = 30 \times 10^4 + 4 \times 10^4 = 34 \times 10^4 = \mathbf{3,4 \times 10^5}$.

Après le calcul, vérifie la forme Un résultat comme 12×10^3 ou $0,5 \times 10^6$ n'est pas en écriture scientifique : ajuste le nombre a et l'exposant pour que $1 \leq a < 10$.

8. Ordres de grandeur

Ordre de grandeur Un ordre de grandeur d'un nombre est une valeur approchée simple, souvent de la forme « un chiffre $\times$ une puissance de 10 », qui permet de se faire une idée rapide de sa taille ou de vérifier un calcul.

Exemple Pour estimer $4,9 \times 10^3 \times 2,1 \times 10^4$, on remplace 4,9 par 5 et 2,1 par 2 : $5 \times 2 = 10$, donc l'ordre de grandeur est $10 \times 10^7 = 10^8$. La valeur exacte est $1,029 \times 10^8$, très proche.

Méthode Arrondis chaque nombre à un seul chiffre significatif, applique les règles sur les puissances, puis compare au résultat de la calculatrice : si les deux sont très différents, tu as sans doute fait une erreur de touche.

9. Problèmes avec de très grandes et de très petites valeurs

On rencontre ces nombres partout : **astronomie** (distances en mètres, masses en kilogrammes), **informatique** (capacité de stockage en octets), **biologie** (taille d'une cellule, d'un virus). Voici la démarche.

Démarche 1) Convertis toutes les données dans la même unité, en écriture

Fiche en ligne : maths-facile.eu/puissances-et-ecriture-scientifique-cours-3eme/ · Cours, exercices et contrôles corrigés

scientifique. 2) Pose le calcul (produit ou quotient). 3) Simplifie avec les règles sur les puissances. 4) Remets en écriture scientifique et conclus avec une phrase en précisant l'unité.

Exemple résolu Un rayon de lumière parcourt 3×10^8 m en 1 s. La Lune est à $3,84 \times 10^8$ m de la Terre. Durée du trajet : $t = \mathbf{3,84 \times 10^8 / 3 \times 10^8} = 1,28$ s. La lumière met environ 1,3 s pour aller de la Terre à la Lune.

À retenir

- $a^n = a \times \dots \times a$ (n facteurs) ; $a^0 = 1$; $a^{-n} = 1 \div a^n$.
- Signe : négatif seulement si la base est négative et l'exposant impair.
- $a^m \times a^n = a^{m+n}$; $a^m \div a^n = a^{m-n}$; $(a^m)^n = a^{m \times n}$; $(ab)^n = a^n b^n$.
- $10^3 = 1\,000$; $10^{-3} = 0,001$; multiplier par 10^n décale la virgule de n rangs.
- Écriture scientifique : $a \times 10^n$ avec $1 \leq a < 10$ et n entier relatif.
- Pour comparer : on regarde d'abord l'exposant, puis le nombre a .
- Pour calculer : on sépare les nombres a et les puissances de 10, puis on remet en écriture scientifique.