

Racines carrées

Corrigé des exercices - 3ème

Corrigé détaillé des exercices du chapitre. Vérifie tes réponses étape par étape et corrige-toi.

1 Carrés parfaits ★★★

On cherche à chaque fois le nombre positif dont le carré est le nombre sous la racine.

- a. $7^2 = 49$ donc $\sqrt{49} = 7$.
- b. $8^2 = 64$ donc $\sqrt{64} = 8$.
- c. $11^2 = 121$ donc $\sqrt{121} = 11$.
- d. $\sqrt{0} = 0$.
- e. $12^2 = 144$ donc $\sqrt{144} = 12$.
- f. $15^2 = 225$ donc $\sqrt{225} = 15$.
- g. $0,3^2 = 0,09$ donc $\sqrt{0,09} = 0,3$.

2 Vrai ou faux ? ★★★

- a. **Vrai** : $5^2 = 25$ et 5 est positif.
- b. **Faux** : on ne peut pas calculer la racine carrée d'un nombre négatif.
- c. **Vrai** : $(\sqrt{a})^2 = a$.
- d. **Faux** : $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$, alors que $\sqrt{25} = 5$.
- e. **Vrai** : $\sqrt{a^2} = a$ pour a positif.
- f. **Faux** : une racine carrée est toujours positive, $\sqrt{36} = 6$ (seulement).

3 Encadrer une racine ★★★

On repère les deux carrés parfaits qui encadrent le nombre.

- a. $16 < 20 < 25$ donc $4 < \sqrt{20} < 5$.
- b. $49 < 50 < 64$ donc $7 < \sqrt{50} < 8$.
- c. $81 < 91 < 100$ donc $9 < \sqrt{91} < 10$.
- d. $4 < 5 < 9$ donc $2 < \sqrt{5} < 3$.
- e. $121 < 140 < 144$ donc $11 < \sqrt{140} < 12$.

4 Carré d'une racine ★★★

- a. $(\sqrt{13})^2 = 13$.

- b. $\sqrt{(9^2)} = 9$.
- c. $(\sqrt{3})^2 \times (\sqrt{5})^2 = 3 \times 5 = 15$.
- d. $(2\sqrt{3})^2 = 2^2 \times (\sqrt{3})^2 = 4 \times 3 = 12$.
- e. $(3\sqrt{2})^2 = 3^2 \times (\sqrt{2})^2 = 9 \times 2 = 18$.

5 Produit de racines ★★★

- a. $\sqrt{2} \times \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$.
- b. $\sqrt{3} \times \sqrt{12} = \sqrt{36} = 6$.
- c. $\sqrt{5} \times \sqrt{20} = \sqrt{100} = 10$.
- d. $\sqrt{7} \times \sqrt{7} = \sqrt{49} = 7$.
- e. $\sqrt{6} \times \sqrt{24} = \sqrt{144} = 12$.
- f. $\sqrt{10} \times \sqrt{40} = \sqrt{400} = 20$.

6 Quotient de racines ★★★

- a. $\sqrt{81} \div \sqrt{9} = 9 \div 3 = 3$.
- b. $\sqrt{50} \div \sqrt{2} = \sqrt{(50 \div 2)} = \sqrt{25} = 5$.
- c. $\sqrt{48} \div \sqrt{3} = \sqrt{16} = 4$.
- d. $\sqrt{(9/25)} = \sqrt{9} \div \sqrt{25} = \mathbf{3/5}$.
- e. $\sqrt{(49/4)} = 7 \div 2 = \mathbf{7/2} = 3,5$.
- f. $\sqrt{(1/100)} = 1 \div 10 = \mathbf{1/10} = 0,1$.

7 Avec la calculatrice ★★★

Avec la touche $\sqrt{}$ de la calculatrice, puis on arrondit au centième.

- a. $\sqrt{7} \approx 2,6457... \text{ donc } \sqrt{7} \approx \mathbf{2,65}$.
- b. $\sqrt{30} \approx 5,4772... \text{ donc } \approx \mathbf{5,48}$.
- c. $\sqrt{123} \approx 11,0905... \text{ donc } \approx \mathbf{11,09}$.
- d. $\sqrt{(0,5)} \approx 0,7071... \text{ donc } \approx \mathbf{0,71}$.
- e. $3\sqrt{5} \approx 3 \times 2,2360... \approx 6,7082... \text{ donc } \approx \mathbf{6,71}$. (On calcule $3 \times \sqrt{5}$ sans arrondir $\sqrt{5}$ avant.)

8 Simplifier des racines ★★★

On cherche le plus grand carré parfait qui divise le nombre.

- a. $\sqrt{12} = \sqrt{(4 \times 3)} = 2\sqrt{3}$.
- b. $\sqrt{18} = \sqrt{(9 \times 2)} = 3\sqrt{2}$.
- c. $\sqrt{45} = \sqrt{(9 \times 5)} = 3\sqrt{5}$.
- d. $\sqrt{75} = \sqrt{(25 \times 3)} = 5\sqrt{3}$.
- e. $\sqrt{98} = \sqrt{(49 \times 2)} = 7\sqrt{2}$.

f. $\sqrt{200} = \sqrt{(100 \times 2)} = 10\sqrt{2}$.

g. $\sqrt{72} = \sqrt{(36 \times 2)} = 6\sqrt{2}$.

h. $\sqrt{180} = \sqrt{(36 \times 5)} = 6\sqrt{5}$.

9 Rentrer sous la racine ★★★

On utilise $a = \sqrt{(a^2)}$.

a. $3\sqrt{2} = \sqrt{9} \times \sqrt{2} = \sqrt{18}$.

b. $5\sqrt{3} = \sqrt{25} \times \sqrt{3} = \sqrt{75}$.

c. $2\sqrt{10} = \sqrt{4} \times \sqrt{10} = \sqrt{40}$.

d. $4\sqrt{5} = \sqrt{16} \times \sqrt{5} = \sqrt{80}$.

10 Additionner des racines identiques ★★★

On factorise la racine commune.

a. $3\sqrt{5} + 2\sqrt{5} = (3 + 2)\sqrt{5} = 5\sqrt{5}$.

b. $7\sqrt{3} - 4\sqrt{3} = (7 - 4)\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$.

c. $\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = (1 + 5 - 2)\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$.

d. $4\sqrt{7} - \sqrt{7} + 2\sqrt{7} = (4 - 1 + 2)\sqrt{7} = 5\sqrt{7}$.

11 Simplifier avant d'additionner ★★★

a. $\sqrt{8} + \sqrt{18} = 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = \mathbf{5\sqrt{2}}$.

b. $\sqrt{27} + \sqrt{12} = 3\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = \mathbf{5\sqrt{3}}$.

c. $\sqrt{50} - \sqrt{32} = 5\sqrt{2} - 4\sqrt{2} = \mathbf{\sqrt{2}}$.

d. $\sqrt{45} + \sqrt{20} - \sqrt{5} = 3\sqrt{5} + 2\sqrt{5} - \sqrt{5} = \mathbf{4\sqrt{5}}$.

12 Développer ★★★

a. $(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1) = (\sqrt{3})^2 - 1^2 = 3 - 1 = \mathbf{2}$.

b. $(2 + \sqrt{5})^2 = 4 + 4\sqrt{5} + 5 = \mathbf{9 + 4\sqrt{5}}$.

c. $(\sqrt{7} - 2)^2 = 7 - 4\sqrt{7} + 4 = \mathbf{11 - 4\sqrt{7}}$.

d. $\sqrt{2}(3 + \sqrt{2}) = 3\sqrt{2} + 2 = \mathbf{2 + 3\sqrt{2}}$.

e. $(3 - \sqrt{2})(3 + \sqrt{2}) = 9 - 2 = \mathbf{7}$.

13 Le carré du jardin ★★★

a. Le côté c vérifie $c^2 = 75$, donc $c = \sqrt{75} = \sqrt{(25 \times 3)} = \mathbf{5\sqrt{3} \text{ m}} (\approx 8,66 \text{ m})$.

b. Périmètre = $4 \times 5\sqrt{3} = \mathbf{20\sqrt{3} \text{ m}}$. Avec la calculatrice : $20 \times 1,7320... \approx 34,64$.

Réponse : le périmètre est exactement $20\sqrt{3} \text{ m}$, soit environ 34,64 m.

14 Hypoténuse ★★★

Le triangle ABC est rectangle en A. D'après le théorème de Pythagore :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 6^2 + 4^2 = 36 + 16 = 52.$$

$$\text{Donc } BC = \sqrt{52} = \sqrt{(4 \times 13)} = \mathbf{2\sqrt{13} \text{ cm} \approx 7,21 \text{ cm.}}$$

15 Équations $x^2 = a$ ★★★

- a. $36 > 0$: deux solutions, 6 et -6 .
- b. $17 > 0$: deux solutions, $\sqrt{17}$ et $-\sqrt{17}$.
- c. $-4 < 0$: **aucune solution**, un carré n'est jamais négatif.
- d. $3x^2 = 75$ donc $x^2 = 25$; solutions 5 et -5 .
- e. $x^2 = 39 + 10 = 49$; solutions 7 et -7 .

16 Comparer sans calculatrice ★★★

- a. $3\sqrt{5} = \sqrt{45}$ et $4\sqrt{3} = \sqrt{48}$. Comme $45 < 48$, **$3\sqrt{5} < 4\sqrt{3}$** .
- b. $(5\sqrt{2})^2 = 25 \times 2 = 50$ et $7^2 = 49$. Les deux nombres sont positifs et $50 > 49$, donc **$5\sqrt{2} > 7$** .
- c. $2\sqrt{7} = \sqrt{28}$ et $3\sqrt{3} = \sqrt{27}$. Comme $28 > 27$, **$2\sqrt{7} > 3\sqrt{3}$** .
- d. $(\sqrt{3} + \sqrt{5})^2 = 3 + 2\sqrt{15} + 5 = 8 + 2\sqrt{15}$ et $(\sqrt{8})^2 = 8$. Comme $2\sqrt{15} > 0$, le premier carré est plus grand, donc **$\sqrt{3} + \sqrt{5} > \sqrt{8}$** . (On vérifie : $1,73 + 2,24 = 3,97 > 2,83$.)

17 Diagonales d'un cube ★★★

- a. La face est un carré de côté 5 cm. Par Pythagore, $d^2 = 5^2 + 5^2 = 50$, donc $d = \sqrt{50} = \mathbf{5\sqrt{2} \text{ cm}}$.
- b. Le triangle formé par une arête verticale (5 cm), la diagonale de la face ($5\sqrt{2}$ cm) et la diagonale du cube est rectangle. $D^2 = 5^2 + (5\sqrt{2})^2 = 25 + 50 = 75$. Donc $D = \sqrt{75} = \mathbf{5\sqrt{3} \text{ cm}}$.
- c. $D \approx 5 \times 1,7320... \approx \mathbf{8,66 \text{ cm}}$.

18 Rationnel ou irrationnel ? ★★★

Un nombre est rationnel s'il s'écrit comme une fraction d'entiers.

- $\sqrt{16} = 4 = \mathbf{4/1}$: **rationnel**.
- $\sqrt{2}$: 2 n'est pas un carré parfait, **irrationnel**.
- $0,25 = \mathbf{1/4}$: **rationnel**.
- $\mathbf{1/3}$: **rationnel** (son écriture décimale 0,333... se répète).
- π : **irrationnel**.
- $\sqrt{(0,49)} = 0,7 = \mathbf{7/10}$: **rationnel**.
- $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$: **irrationnel** (12 n'est pas un carré parfait).

19 Un inverse étonnant ★★★

- a. $(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1) = (\sqrt{2})^2 - 1^2 = 2 - 1 = 1$.
- b. Deux nombres dont le produit vaut 1 sont inverses l'un de l'autre. L'inverse de $\sqrt{2} + 1$ est donc $\sqrt{2} - 1$.
- c. $(1 + \sqrt{2})^2 = 1 + 2\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 = 1 + 2\sqrt{2} + 2 = \mathbf{3 + 2\sqrt{2}}$.

20 Supprimer le radical du dénominateur ★★★

On multiplie le numérateur et le dénominateur par la racine du dénominateur : cela ne change pas la valeur du quotient.

- a. $6 \div \sqrt{3} = (6 \times \sqrt{3}) \div (\sqrt{3} \times \sqrt{3}) = 6\sqrt{3} \div 3 = \mathbf{2\sqrt{3}}$.
- b. $10 \div \sqrt{5} = 10\sqrt{5} \div 5 = \mathbf{2\sqrt{5}}$.
- c. $1 \div \sqrt{2} = \sqrt{2} \div 2 = \mathbf{1/2\sqrt{2} \approx 0,71}$.

21 Expressions à simplifier ★★★

$$\mathbf{A = 5\sqrt{3} - 2 \times 2\sqrt{3} + \sqrt{3} = 5\sqrt{3} - 4\sqrt{3} + \sqrt{3} = 2\sqrt{3}.}$$

$$\mathbf{B = (\sqrt{5})^2 - 2^2 + 2\sqrt{5} = 5 - 4 + 2\sqrt{5} = 1 + 2\sqrt{5}.}$$

$$\mathbf{C = 9 \times 2 - 4 \times 3 = 18 - 12 = 6.}$$

22 Un rectangle à racines ★★★

$$\text{Aire} = 3\sqrt{3} \times 2\sqrt{3} = 6 \times (\sqrt{3})^2 = 6 \times 3 = \mathbf{18 \text{ m}^2}.$$

$$\text{Périmètre} = 2 \times (3\sqrt{3} + 2\sqrt{3}) = 2 \times 5\sqrt{3} = \mathbf{10\sqrt{3} \text{ m} \approx 17,32 \text{ m}}.$$

$$\text{Diagonale } d : d^2 = (3\sqrt{3})^2 + (2\sqrt{3})^2 = 27 + 12 = 39 \text{ (Pythagore), donc } d = \mathbf{\sqrt{39} \text{ m} \approx 6,24 \text{ m}}.$$

23 Le cercle du carré ★★★

La diagonale du carré est un diamètre du cercle circonscrit. Par Pythagore, $AC^2 = 6^2 + 6^2 = 72$, donc $AC = \sqrt{72} = 6\sqrt{2} \text{ cm}$.

Le rayon est la moitié : $\mathbf{3\sqrt{2} \text{ cm} \approx 4,24 \text{ cm}}$.

$$\text{Aire du disque} = \pi \times (3\sqrt{2})^2 = \pi \times 18 = \mathbf{18\pi \text{ cm}^2 \approx 56,55 \text{ cm}^2}.$$