

Racines carrées

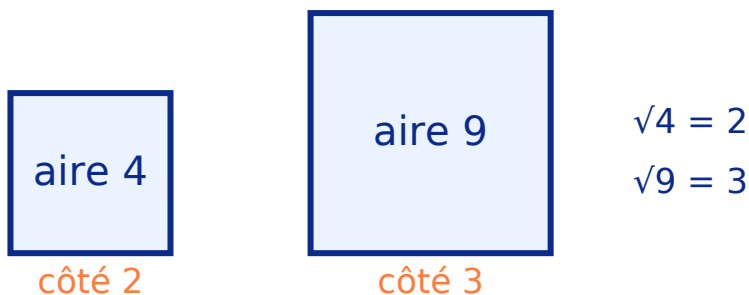
Cours de maths - 3ème

Quel est le côté d'un carré dont l'aire est de 49 m^2 ? Et si l'aire vaut 2 m^2 , peut-on encore répondre ? Dans ce chapitre, tu découvres la **racine carrée**, un nouvel outil pour « défaire » un carré. Tu apprends à la calculer, à la **simplifier**, à l'additionner, à la comparer, et tu rencontres des nombres étonnants : les **nombres irrationnels**.

Rappel de 4ème : le carré d'un nombre est ce nombre multiplié par lui-même ($5^2 = 5 \times 5 = 25$), et dans un triangle rectangle on a le théorème de Pythagore : $\text{hypoténuse}^2 = \text{somme des carrés des deux autres côtés}$.

1. Qu'est-ce qu'une racine carrée ?

Racine carrée Soit a un nombre **positif ou nul**. La racine carrée de a , notée $\sqrt{a}$, est le **nombre positif dont le carré est a** . Autrement dit : $\sqrt{a} \geq 0$ et $(\sqrt{a})^2 = a$.



Exemples $\sqrt{36} = 6$ car 6 est positif et $6^2 = 36$. $\sqrt{0} = 0$. $\sqrt{1} = 1$. $\sqrt{(0,25)} = 0,5$ car $0,5^2 = 0,25$.

Deux pièges • On ne peut pas calculer la racine carrée d'un nombre **négatif** : $\sqrt{-9}$ n'existe pas, car aucun nombre multiplié par lui-même ne donne un résultat négatif.

- $\sqrt{a}$ est **toujours positif** : $\sqrt{25} = 5$ et jamais -5 . (Le nombre -5 a bien un carré égal à 25, mais ce n'est pas « la » racine carrée.)

Deux égalités à connaître Pour tout nombre a positif : $(\sqrt{a})^2 = a$ et $\sqrt{(a^2)} = a$. Par exemple $(\sqrt{7})^2 = 7$ et $\sqrt{(13^2)} = 13$. Élever au carré et prendre la racine carrée, ce sont deux opérations qui se « défont » l'une l'autre.

2. Les carrés parfaits

Carré parfait Un **carré parfait** est le carré d'un nombre entier. Sa racine carrée est alors un nombre entier : $\sqrt{64} = 8$ car $64 = 8^2$.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
n ²	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196	225

Les carrés parfaits de 1 à 15 : à connaître pour reconnaître vite une racine « qui tombe juste ».

Encadrer une racine entre deux entiers Pour encadrer $\sqrt{a}$ quand a n'est pas un carré parfait, repère les deux carrés parfaits qui entourent a .

Exemple : 40 est entre 36 et 49, donc $6^2 < 40 < 7^2$, donc **$6 < \sqrt{40} < 7$** .

Astuce Un carré parfait ne se termine jamais par 2, 3, 7 ou 8. Si un nombre entier finit par l'un de ces chiffres, sa racine carrée n'est pas un entier.

3. Valeur exacte et valeur approchée

La plupart des racines carrées ne « tombent pas juste ». Par exemple $\sqrt{7}$ a une infinité de décimales sans motif répétitif : 2,6457513... On distingue donc deux écritures.

Valeur exacte et valeur approchée Écrire $\sqrt{7}$, c'est donner la **valeur exacte** du nombre. Écrire **2,65**, c'est donner une **valeur approchée** (arrondie au centième), que l'on note $\sqrt{7} \approx 2,65$.

Utiliser la calculatrice Appuie sur la touche $\sqrt{}$ puis tape le nombre (selon le modèle, ferme la parenthèse). La calculatrice affiche une valeur approchée. Arrondis ensuite comme demandé.

$\sqrt{30} \approx 5,477...$ donc $\sqrt{30} \approx 5,48$ (au centième).

À retenir sur les calculs Dans un calcul à plusieurs étapes, **garde les racines** (valeur exacte) jusqu'à la fin, puis arrondis seulement le résultat final. Arrondir trop tôt fausse la réponse.

4. Produit et quotient de racines

Racine d'un produit Pour tous nombres a et b positifs : **$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$** .

Racine d'un quotient Pour a positif et b strictement positif : **$\sqrt{a \div b} = \sqrt{a} \div \sqrt{b}$** . Avec une fraction : **$\sqrt{(9/16)} = \sqrt{9} \div \sqrt{16} = 3/4$** .

Exemples $\sqrt{3} \times \sqrt{12} = \sqrt{36} = 6$.

Fiche en ligne : maths-facile.eu/racines-carrees-cours-3eme/ · Cours, exercices et contrôles corrigés sur **maths-**

$$\sqrt{50} \div \sqrt{2} = \sqrt{(50 \div 2)} = \sqrt{25} = 5.$$
$$\sqrt{5} \times \sqrt{5} = \sqrt{25} = 5, \text{ ce qui retrouve } (\sqrt{5})^2 = 5.$$

Pourquoi ça marche ? Le carré de $\sqrt{a} \times \sqrt{b}$ vaut $(\sqrt{a})^2 \times (\sqrt{b})^2 = a \times b$. Et ce produit est positif. C'est donc bien la racine carrée de $a \times b$.

Pas de formule pour une somme ! En général $\sqrt{a + b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$. Contre-exemple : $\sqrt{(9 + 16)} = \sqrt{25} = 5$, mais $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$. Il en va de même pour la différence.

5. Simplifier une racine carrée

Grâce à la propriété du produit, on peut « sortir » un carré parfait de sous la racine.

Méthode : écrire $\sqrt{n}$ sous la forme $a\sqrt{b}$

1. Cherche le **plus grand carré parfait** qui divise n (4, 9, 16, 25, 36...).
2. Écris n comme un produit contenant ce carré.
3. Sépare la racine du produit, puis calcule la racine du carré parfait.

Exemples $\sqrt{72} = \sqrt{(36 \times 2)} = \sqrt{36} \times \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$.
 $\sqrt{45} = \sqrt{(9 \times 5)} = 3\sqrt{5}$.
 $\sqrt{300} = \sqrt{(100 \times 3)} = 10\sqrt{3}$.
Dans l'autre sens : $4\sqrt{3} = \sqrt{16} \times \sqrt{3} = \sqrt{48}$.

Si tu hésites Tu peux faire en deux temps : $\sqrt{72} = \sqrt{(4 \times 18)} = 2\sqrt{18}$, puis $18 = 9 \times 2$ donc $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ et on obtient $2 \times 3\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$. Le résultat est le même.

6. Sommes et différences de racines carrées

Les racines carrées s'additionnent comme des « objets » identiques : 3 pommes + 2 pommes = 5 pommes. De même $3\sqrt{5} + 2\sqrt{5} = 5\sqrt{5}$ (on factorise $\sqrt{5}$: $(3 + 2)\sqrt{5}$).

Additionner ou soustraire des racines

1. **Simplifie** chacune des racines.
2. Regroupe celles qui ont la **même racine** (le même nombre sous le radical).
3. Additionne les coefficients.

Exemple résolu $A = \sqrt{18} + \sqrt{50} - \sqrt{8}$
 $A = 3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 2\sqrt{2}$
 $A = (3 + 5 - 2)\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$.

Le piège classique $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ ne se simplifie pas : les racines sont différentes, on laisse l'écriture telle quelle. Et surtout, $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ n'est pas égal à $\sqrt{5}$.

Les identités remarquables fonctionnent aussi avec les racines : $(\sqrt{a} + 1)(\sqrt{a} - 1) = (\sqrt{a})^2 -$

$$1 = a - 1 \text{ et } (2 + \sqrt{3})^2 = 4 + 4\sqrt{3} + 3 = 7 + 4\sqrt{3}.$$

7. Comparer des nombres avec des racines

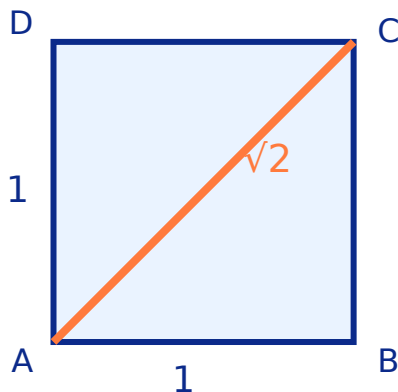
Ordre et racine carrée Pour deux nombres positifs a et b : si $a < b$ alors $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ (et réciproquement). La racine carrée « garde l'ordre ».

Comparer $3\sqrt{5}$ et $2\sqrt{11}$ On rentre les coefficients sous la racine : $3\sqrt{5} = \sqrt{45}$ et $2\sqrt{11} = \sqrt{44}$. Comme $45 > 44$, on a $3\sqrt{5} > 2\sqrt{11}$.

On peut aussi comparer les carrés de deux nombres positifs : $(3\sqrt{5})^2 = 45$ et $(2\sqrt{11})^2 = 44$.

Encadrement Comme $2,6^2 = 6,76$ et $2,7^2 = 7,29$, on a $2,6 < \sqrt{7} < 2,7$. La calculatrice confirme : $\sqrt{7} \approx 2,6457$.

8. Nombres irrationnels et équation $x^2 = a$



Dans le carré ABCD de côté 1, la diagonale AC mesure $\sqrt{2}$ d'après le théorème de Pythagore : $AC^2 = 1^2 + 1^2 = 2$.

Nombre irrationnel Un nombre est **rationnel** s'il peut s'écrire comme une fraction d'entiers (le dénominateur étant non nul). Un nombre **irrationnel** est un nombre qui n'est pas rationnel : il ne peut pas s'écrire sous forme de fraction, et son écriture décimale ne se termine jamais et ne se répète jamais.

Nombre	Entier	Décimal	Rationnel (fraction)	Irrationnel
$\sqrt{49} = 7$	oui	oui	oui	non
0,25	non	oui	oui	non
$\frac{1}{3}$	non	non	oui	non
$\sqrt{2}$	non	non	non	oui
π	non	non	non	oui

À savoir Si n est un entier qui n'est pas un carré parfait, alors $\sqrt{n}$ est **irrationnel** : $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{10}$... Le nombre π est lui aussi irrationnel. En revanche $\sqrt{49} = 7$ est un

Fiche en ligne : maths-facile.eu/racines-carrees-cours-3eme/ · Cours, exercices et contrôles corrigés sur [maths-](https://maths-facile.eu)

entier, donc rationnel.

Mathbot dit Quand ta calculatrice affiche 1,414213562, elle ne donne pas $\sqrt{2}$: elle donne seulement une valeur approchée. Le vrai $\sqrt{2}$ continue sans jamais se répéter !

Résoudre $x^2 = a$ • Si $a > 0$: il y a **deux solutions**, $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.

• Si $a = 0$: une seule solution, 0.

• Si $a < 0$: **aucune solution**.

Exemple : $x^2 = 11$ a pour solutions $\sqrt{11}$ et $-\sqrt{11}$; $x^2 = -3$ n'a pas de solution.

À retenir

- $\sqrt{a}$ (avec $a \geq 0$) est le nombre **positif** dont le carré est a : $(\sqrt{a})^2 = a$ et $\sqrt{a^2} = a$.
- On ne peut pas prendre la racine carrée d'un nombre négatif.
- Les carrés parfaits de 1 à 15 : 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225.
- $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ et $\sqrt{a \div b} = \sqrt{a} \div \sqrt{b}$. Mais $\sqrt{a + b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.
- Simplifier : chercher le plus grand carré parfait qui divise le nombre ($\sqrt{72} = 6\sqrt{2}$).
- Pour additionner des racines : simplifier d'abord, puis regrouper celles qui sont identiques.
- Pour comparer deux nombres positifs, on peut comparer leurs carrés ou rentrer les coefficients sous la racine.
- $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$... sont des nombres irrationnels ; $x^2 = a$ a deux solutions si $a > 0$.