

Repérage et espace

Cours de maths - 3ème

Comment dire **où** se trouve un point ? Sur une droite, sur une feuille, sur une carte, sur la Terre entière ou à l'intérieur d'un solide, on utilise toujours la même idée : donner des **nombres** qui repèrent le point. Dans ce chapitre de 3ème, tu calcules avec des coordonnées (milieu, distance), tu te repères sur le globe avec la latitude et la longitude, tu découvres les **sections de solides** par un plan et tu retrouves ce que devient un solide quand on l'agrandit ou le réduit.

1. Rappels : repérer sur une droite graduée

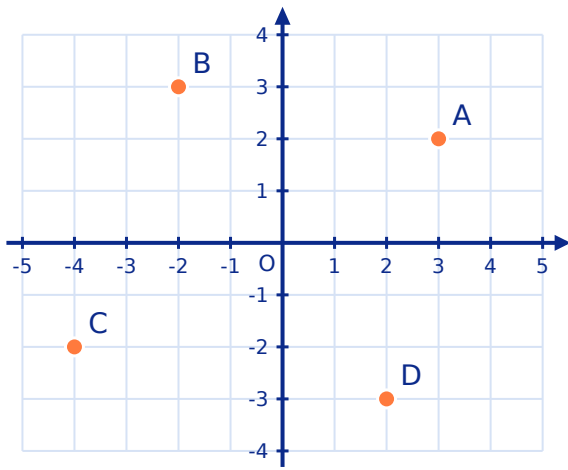
Abscisse Sur une droite graduée d'origine O, chaque point est repéré par un nombre relatif appelé son **abscisse**. Elle est positive si le point est du côté du sens de la flèche, négative sinon. On écrit A(-2,5) pour dire que A a pour abscisse -2,5.

Distance entre deux points d'une droite graduée Si A a pour abscisse x_A et B pour abscisse x_B , alors $AB = |x_B - x_A|$: on soustrait la plus petite abscisse à la plus grande. Le **milieu** de [AB] a pour abscisse $\frac{x_A + x_B}{2}$.

Exemple A(-3) et B(5,5) : $AB = 5,5 - (-3) = 5,5 + 3 = 8,5$. Le milieu M a pour abscisse $(-3 + 5,5) \div 2 = 2,5 \div 2 = 1,25$.

2. Coordonnées dans un repère orthonormé

Repère orthonormé Un repère orthonormé du plan est formé de **deux axes gradués perpendiculaires** qui se coupent en O (l'origine) et qui ont **la même unité de longueur**. L'axe horizontal est l'axe des **abscisses**, l'axe vertical est l'axe des **ordonnées**. Un point M est repéré par son **couple de coordonnées** (x ; y), toujours dans cet ordre : abscisse d'abord, ordonnée ensuite. On note M(x ; y).



Ici : A(3 ; 2), B(-2 ; 3), C(-4 ; -2) et D(2 ; -3).

Lire ou placer un point Pour **lire** les coordonnées : depuis le point, on descend (ou on monte) jusqu'à l'axe horizontal pour lire l'abscisse, puis on va horizontalement jusqu'à l'axe vertical pour lire l'ordonnée. Pour **placer** M(-2 ; 3) : on part de O, on se déplace de 2 vers la gauche (abscisse négative), puis de 3 vers le haut (ordonnée positive).

Piège (2 ; -3) et (-3 ; 2) sont deux points différents : l'**ordre** compte. Un point de l'axe horizontal a une ordonnée égale à 0 ; un point de l'axe vertical a une abscisse égale à 0.

Les quatre zones Les axes partagent le plan en quatre zones : en haut à droite ($x > 0$ et $y > 0$), en haut à gauche ($x < 0$ et $y > 0$), en bas à gauche ($x < 0$ et $y < 0$), en bas à droite ($x > 0$ et $y < 0$).

3. Milieu d'un segment

Coordonnées du milieu Dans un repère, si A(x_A ; y_A) et B(x_B ; y_B), le milieu M de [AB] a pour coordonnées

M($\frac{x_A+x_B}{2}$; $\frac{y_A+y_B}{2}$) : on fait la moyenne des abscisses et la moyenne des ordonnées.

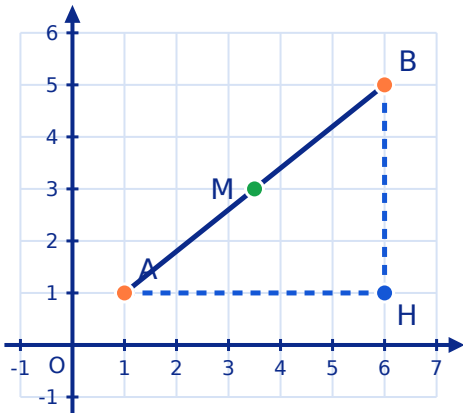
Exemple A(1 ; 1) et B(6 ; 5). Le milieu M a pour abscisse $(1 + 6) \div 2 = 3,5$ et pour ordonnée $(1 + 5) \div 2 = 3$. Donc **M(3,5 ; 3)**.

Trouver un symétrique Si M est le milieu de [AB], alors B est le symétrique de A par rapport à M. On connaît A et M, on cherche B : $x_B = 2x_M - x_A$ et $y_B = 2y_M - y_A$. Exemple : A(1 ; 1) et M(3,5 ; 3) donnent B($2 \times 3,5 - 1$; $2 \times 3 - 1$) = B(6 ; 5).

Parallélogramme Un quadrilatère est un parallélogramme si et seulement si ses diagonales ont le **même milieu**. On le vérifie en calculant les deux milieux.

4. Distance entre deux points

Dans un repère **orthonormé**, on peut calculer la longueur d'un segment à partir des coordonnées de ses extrémités. L'idée : on construit un triangle rectangle dont le segment est l'hypoténuse, puis on applique le théorème de Pythagore.



$A(1 ; 1)$, $B(6 ; 5)$ et $H(6 ; 1)$. Le triangle AHB est rectangle en H, avec $AH = 6 - 1 = 5$ et $HB = 5 - 1 = 4$.

Formule de la distance Dans un repère orthonormé : $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

Exemple Avec la figure : $AB^2 = 5^2 + 4^2 = 25 + 16 = 41$, donc $AB = \sqrt{41} \approx 6,4$ (au dixième). Pour $A(-2 ; 1)$ et $C(4 ; -3)$: $AC^2 = 6^2 + (-4)^2 = 36 + 16 = 52$, donc $AC = \sqrt{52} \approx 7,2$.

Pièges Cette formule n'est valable que dans un repère **orthonormé** (même unité sur les deux axes). Attention aux signes : $(-4)^2 = 16$, mais -4^2 s'écrit -16 ! Enfin, on ne remplace pas $\sqrt{41}$ par 6,4 dans les calculs intermédiaires : on garde la valeur exacte, on arrondit à la fin.

Nature d'un triangle avec les coordonnées On calcule les trois carrés des longueurs. Deux carrés égaux : le triangle est **isocèle**. Trois carrés égaux : **équilatéral**. Si le plus grand carré est la somme des deux autres, le triangle est **rectangle** (réciproque du théorème de Pythagore). On compare les *carrés*, ça évite les racines.

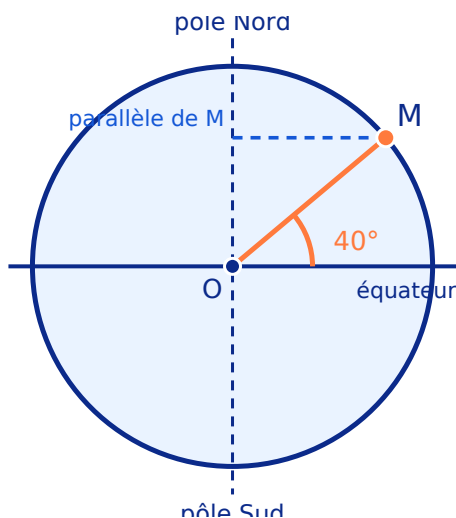
5. Se repérer sur la Terre

La Terre est assimilée à une **sphère**. Pour y repérer un lieu, on utilise deux angles, un peu comme une abscisse et une ordonnée.

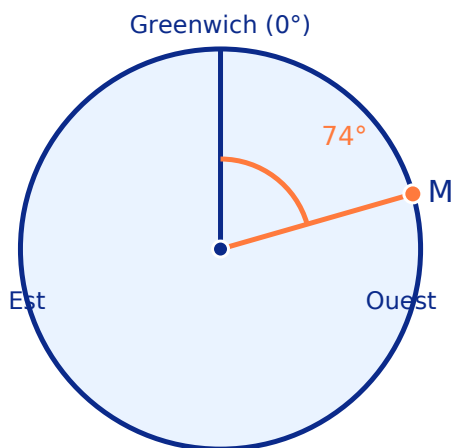
Vocabulaire L'**équateur** est le grand cercle perpendiculaire à l'axe des pôles. Les **parallèles** sont les cercles parallèles à l'équateur. Les **méridiens** sont les demi-cercles qui joignent le pôle Nord au pôle Sud ; celui qui passe par Greenwich (près de Londres)

Fiche en ligne : maths-facile.eu/reperage-et-espace-cours-3eme/ · Cours, exercices et contrôles corrigés sur maths-facile.eu

est le **méridien origine**.



Latitude La **latitude** d'un point M est l'angle, mesuré depuis le centre O de la Terre, entre le rayon [OM] et le plan de l'équateur. Elle va de 0° (équateur) à 90° (pôles), avec la précision **Nord** ou **Sud**. Tous les points d'un même parallèle ont la même latitude.



vue de dessus, depuis le pôle Nord

Longitude La **longitude** de M est l'angle entre le méridien d'origine (Greenwich) et le méridien de M. Elle va de 0° à 180° avec la précision **Est** ou **Ouest**. Tous les points d'un même méridien ont la même longitude.

Exemple Tokyo se situe vers (36° N ; 140° E) : au nord de l'équateur et à l'est de Greenwich. New York se situe vers (41° N ; 74° O). Un point de coordonnées géographiques (0° ; 0°) est à la fois sur l'équateur et sur le méridien de Greenwich.

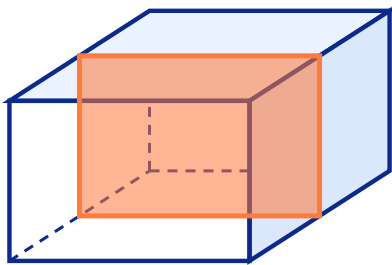
Longueurs sur la sphère Le rayon de la Terre est environ 6 370 km. L'équateur est un cercle de longueur $2\pi \times 6\,370 \approx 40\,024$ km. Le parallèle de latitude φ est un cercle de rayon $6\,370 \times \cos \varphi$, donc plus petit que l'équateur. Sur un même méridien (ou sur l'équateur), un angle de n° correspond à un arc de **$n/360$** de la longueur du grand cercle.

Astuce Un degré de latitude correspond toujours à environ $40\,024 \div 360 \approx 111$ km. Mathbot te le rappelle : Nord-Sud, c'est la latitude ; Est-Ouest, c'est la longitude !

6. Sections de solides par un plan

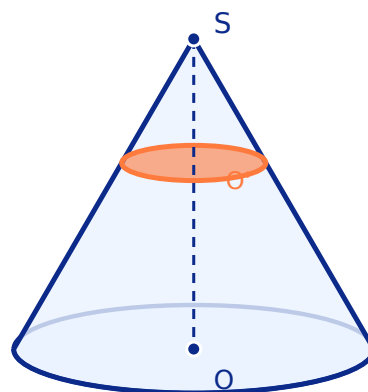
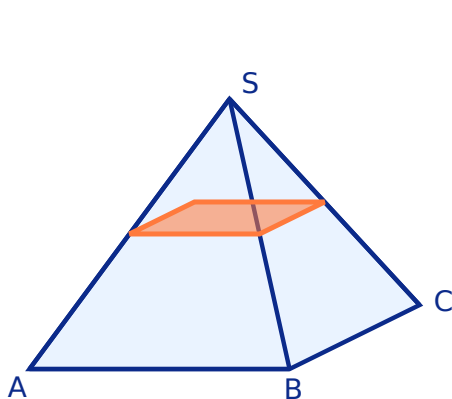
Couper un solide par un plan, c'est comme trancher un fruit avec un couteau parfaitement plat. La **section** est la forme de la coupe.

Pavé droit et cylindre Un plan **parallèle à une face** d'un pavé droit coupe le solide suivant un **rectangle de mêmes dimensions que cette face**. Un plan parallèle à une arête donne aussi un rectangle, dont un côté est de la longueur de cette arête. Pour un cylindre de révolution, un plan parallèle aux bases donne un **disque de même rayon** ; un plan parallèle à l'axe donne un **rectangle**.



section : rectangle

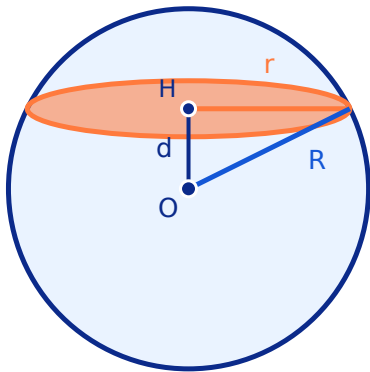
Pyramide et cône Quand on coupe une pyramide (ou un cône de révolution) par un plan **parallèle à la base**, la section est une **réduction** de la base : même forme, avec le coefficient $k = SO' \div SO$, où S est le sommet, O le centre de la base et O' le centre de la section. Un carré de côté c devient un carré de côté $k \times c$; un disque de rayon R devient un disque de rayon $k \times R$. La petite pyramide (ou le petit cône) ainsi découpée est, elle aussi, une réduction du solide de départ.



Exemple Un cône de hauteur 12 cm et de rayon de base 6 cm est coupé à 3 cm du sommet par un plan parallèle à la base. Le coefficient est $k = 3 \div 12 = \mathbf{1/4}$. La section est un disque de rayon $6 \times \mathbf{1/4} = \mathbf{1,5\text{ cm}}$.

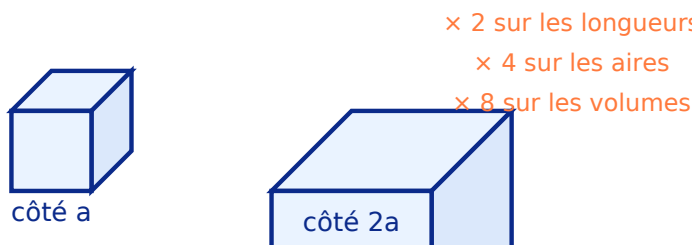
Boule (sphère) La section d'une boule de rayon R par un plan est toujours un **disque**.

Si le plan passe par le centre, le disque a pour rayon R (c'est un **grand cercle**). Si le plan est à la distance d du centre (avec $d < R$), le rayon r du disque vérifie $r^2 = R^2 - d^2$ (Pythagore dans le triangle rectangle OHM de la figure). Si $d = R$, le plan touche la boule en un seul point.



Exemple Boule de rayon 10 cm coupée à 6 cm du centre : $r^2 = 10^2 - 6^2 = 100 - 36 = 64$, donc $r = 8$ cm.

7. Agrandissement et réduction de solides



Effet d'un coefficient k Quand on agrandit ($k > 1$) ou réduit ($0 < k < 1$) un solide de coefficient k : les **longueurs** sont multipliées par k , les **angles** ne changent pas, les **aires** sont multipliées par k^2 et les **volumes** par k^3 .

Exemple Une maquette est à l'échelle 1/20 ($k = 1/20$). Un bâtiment de 30 m de haut a une maquette de $30 \div 20 = 1,5$ m. Un volume de 8 000 cm³ sur la maquette correspond à $8\,000 \times 20^3 = 8\,000 \times 8\,000 = 64\,000\,000$ cm³ dans la réalité.

Piège Si les longueurs sont multipliées par 3, le volume n'est pas multiplié par 3 mais par $3^3 = 27$, et l'aire par $3^2 = 9$. Dans une pyramide coupée parallèlement à sa base, le petit solide a un volume égal à k^3 fois celui de la grande pyramide.

8. Lire un plan ou une carte

Échelle L'échelle d'une carte est le coefficient de réduction : une carte à l'échelle **1/25000** signifie que **1 cm sur la carte représente 25 000 cm** (soit 250 m) sur le terrain. Les distances réelles sont proportionnelles aux distances sur la carte.

1/25 000 : 1 cm sur la carte = 250 m en vrai (m)



Convertir une distance De la carte vers le terrain : on multiplie par le dénominateur de l'échelle, puis on convertit. Du terrain vers la carte : on divise. Exemple (échelle **1/25000**) : 6,4 cm sur la carte représentent $6,4 \times 25\,000 = 160\,000\text{ cm} = \mathbf{1,6\ km}$.

Aires sur une carte Comme sur une réduction, les aires sont multipliées par k^2 . À l'échelle **1/25000**, 1 cm² sur la carte représente $250\text{ m} \times 250\text{ m} = 62\,500\text{ m}^2$, soit **6,25 ha**.

Repérage par quadrillage Les plans de ville et les cartes sont souvent quadrillés avec des lettres en colonne et des chiffres en ligne (par exemple « D5 ») : c'est exactement un système de coordonnées, simplifié !

À retenir

- Dans un repère, un point se repère par son couple (abscisse ; ordonnée), dans cet ordre.
- Milieu de [AB] : M($\mathbf{x_A+x_B/2}$; $\mathbf{y_A+y_B/2}$).
- Repère orthonormé : $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$; sur un axe, $AB = |x_B - x_A|$.
- Un quadrilatère dont les diagonales ont le même milieu est un parallélogramme.
- Sur la Terre : latitude (0° à 90°, Nord ou Sud, depuis l'équateur) et longitude (0° à 180°, Est ou Ouest, depuis Greenwich).
- Section d'un pavé parallèle à une face : rectangle de mêmes dimensions ; section d'une pyramide ou d'un cône parallèle à la base : réduction de la base de coefficient k .
- Section d'une boule : un disque, de rayon $r = \sqrt{R^2 - d^2}$.
- Coefficient k : longueurs $\times k$, aires $\times k^2$, volumes $\times k^3$.
- Échelle **1/N** : 1 cm sur la carte = N cm sur le terrain.