

Signe d'une fonction

Corrigé des exercices - 2de

Corrigé détaillé des exercices du chapitre. Vérifie tes réponses étape par étape et corrige-toi.

1 Lire une courbe ★★★

- a. La courbe coupe l'axe des abscisses en -3 et en 1 : les zéros de u sont -3 et 1 .
 b. Entre -3 et 1 , la courbe est sous l'axe ; ailleurs, elle est au-dessus.

x	-4		-3		1		3
u(x)		+	0	-	0	+	

- c. $u(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-3 ; 1[$ (les zéros sont exclus).

2 Vrai ou faux avec un tableau ★★★

- a. **Vrai.** 0 appartient à $] -1 ; 2[$ où f est positive.
 b. **Faux.** 3 appartient à $] 2 ; 5]$ où f est négative : $f(3) < 0$.
 c. **Vrai.** Le tableau indique 0 sous -1 .
 d. **Vrai.** f est positive entre -1 et 2 , et nulle en -1 et en 2 .
 e. **Faux.** $f(-3) < 0$ (car $-3 \in [-4 ; -1[$) et $f(1) > 0$: le produit d'un négatif et d'un positif est négatif.

3 Signes de fonctions affines ★★★

- a. $3x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = 4$. Comme $3 > 0$, f est négative avant 4 et positive après.

x	$-\infty$		4		$+\infty$
f(x)		-	0	+	

- b. $-4x + 10 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} = 2,5$. Comme $-4 < 0$, g est positive avant 2,5 et négative après.

x	$-\infty$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
g(x)		+	0	-	

- c. $0,5x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -6$. Comme $0,5 > 0$: négative avant -6 , positive après.

x	$-\infty$		-6		$+\infty$
h(x)		-	0	+	

- d. $7 - x = 0 \Leftrightarrow x = 7$. Ici $a = -1 < 0$: positive avant 7, négative après.

x	$-\infty$		7		$+\infty$
k(x)		+	0	-	

4 Fonctions de référence ★★★

- $4x^2$: $4 > 0$ et $x^2 \geq 0$, donc $4x^2 \geq 0$; elle est nulle seulement en 0.
- $-3x^2$: le facteur -3 est négatif, donc $-3x^2 \leq 0$; nulle seulement en 0.
- $\frac{2}{x}$ a le signe de x (car $2 > 0$) : négative si $x < 0$, positive si $x > 0$.
- $-\frac{1}{x}$ a le signe contraire : positive si $x < 0$, négative si $x > 0$.
- $x^2 + 5 \geq 5 > 0$: strictement positive pour tout réel x .

5 Inéquations affines ★★★

- $4x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = 3$; $a = 4 > 0$, donc $4x - 12 > 0 \Leftrightarrow x > 3$. Solutions : $]3 ; +\infty[$.
- $-3x + 9 = 0 \Leftrightarrow x = 3$; $a = -3 < 0$, donc $-3x + 9$ est négative après 3 : $-3x + 9 \leq 0 \Leftrightarrow x \geq 3$. Solutions : $[3 ; +\infty[$.
- $2x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{2}$; $a = 2 > 0$, donc $2x + 5 < 0 \Leftrightarrow x < -\frac{5}{2}$. Solutions : $] -\infty ; -2,5[$.
- $8 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 4$; $a = -2 < 0$, donc $8 - 2x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 4$. Solutions : $] -\infty ; 4]$.

6 Altitude d'un drone ★★★

- $12 - 3t = 0 \Leftrightarrow t = 4$. Le coefficient de t est $-3 < 0$: h est positive avant 4, négative après.

x	0		4		6
h(t)		+	0	-	

- Le drone touche le sol quand $h(t) = 0$, c'est-à-dire à $t = 4$ secondes.
- Pour $t > 4$, $h(t) < 0$: l'altitude serait négative, donc sous le sol. Ce n'est pas possible : le modèle n'est valable que pour $t \leq 4$.

7 Un produit simple ★★★

$x + 3$ s'annule en -3 et $x - 1$ en 1. Tous deux ont un coefficient de x positif.

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$x + 3$		-	0	+		+	
$x - 1$		-		-	0	+	
P(x)		+	0	-	0	+	

$P(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty ; -3] \cup [1 ; +\infty[$ (les zéros sont inclus car l'inégalité est large).

8 Une cubique à lire ★★★

a. Les zéros de h sont -2 , 1 et 3 .

x	-3	-2	1	3	4
$h(x)$	-	0	+	0	+

b. La courbe est sous l'axe sur $[-3 ; -2[$, au-dessus sur $]-2 ; 1[$, sous l'axe sur $]1 ; 3[$ et au-dessus sur $]3 ; 4]$.

c. $h(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-2 ; 1[\cup]3 ; 4]$. $h(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [-3 ; -2] \cup [1 ; 3]$.

d. $-2,5 \in [-3 ; -2[: h(-2,5) < 0$. $2 \in]1 ; 3[: h(2) < 0$.

9 Un produit de deux affines ★★★

$2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$ (coefficient $2 > 0$). $5 - x = 0 \Leftrightarrow x = 5$ (coefficient $-1 < 0$). On a $\frac{3}{2} = 1,5 < 5$.

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		5		$+\infty$
$2x - 3$		-	0	+		+	
$5 - x$		+		+	0	-	
produit		-	0	+	0	-	

Le produit est positif ou nul entre 1,5 et 5, bornes incluses. Solutions : $[1,5 ; 5]$.

10 Trois facteurs ★★★

Les zéros des facteurs sont 0, 2 et -3 . Rangés : $-3 < 0 < 2$.

x	$-\infty$		-3		0		2		$+\infty$
x		-		-	0	+		+	
$x - 2$		-		-		-	0	+	
$x + 3$		-	0	+		+		+	
F(x)		-	0	+	0	-	0	+	

Vérification en $x = 1$: $F(1) = 1 \times (-1) \times 4 = -4 < 0$, cohérent avec la case $]0 ; 2[$.

$F(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-3 ; 0[\cup]2 ; +\infty[$.

11 Un quotient avec valeur interdite ★★★

Le quotient est défini pour $x \neq 4$. Le numérateur s'annule en -2 , le dénominateur en 4.

x	$-\infty$		-2		4		$+\infty$
$x + 2$		-	0	+		+	
$x - 4$		-		-	0	+	
quotient		+	0	-		+	

Le quotient est négatif ou nul pour $x \in [-2 ; 4[$: -2 est inclus (le quotient y vaut 0) et 4 est exclu (valeur interdite).

12 Un quotient à numérateur décroissant ★★★

$3 - x = 0 \Leftrightarrow x = 3$ (coefficient $-1 < 0$). $2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$ (coefficient $2 > 0$), valeur interdite. On a $-\frac{1}{2} < 3$.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		3		$+\infty$
$3 - x$		+		+	0	-	
$2x + 1$		-	0	+		+	
quotient		-		+	0	-	

Inégalité stricte : les deux valeurs sont exclues. Solutions : $] -0,5 ; 3[$.

13 Factoriser pour résoudre ★★★

a. On reconnaît l'identité $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$: $x^2 - 25 = (x - 5)(x + 5)$.

x	$-\infty$		-5		5		$+\infty$
$x - 5$		-		-	0	+	
$x + 5$		-	0	+		+	
(x - 5)(x + 5)		+	0	-	0	+	

Solutions de $x^2 - 25 \leq 0$: $[-5 ; 5]$.

b. $x^2 - 4x = x(x - 4)$, de zéros 0 et 4.

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
x		-	0	+		+	
$x - 4$		-		-	0	+	
x(x - 4)		+	0	-	0	+	

Solutions de $x^2 - 4x \geq 0$: $] -\infty ; 0] \cup [4 ; +\infty[$.

14 Comparer une parabole et une droite (calcul) ★★★

Développons : $(x - 4)(x + 2) = x^2 + 2x - 4x - 8 = x^2 - 2x - 8$. ✓

Fiche en ligne : maths-facile.eu/signe-d-une-fonction-corrige-exercices-2de/ · Cours, exercices et contrôles corrigés sur

$$x^2 \leq 2x + 8 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 \leq 0 \Leftrightarrow (x - 4)(x + 2) \leq 0.$$

x	$-\infty$		-2		4		$+\infty$
$x - 4$		-		-	0	+	
$x + 2$		-	0	+		+	
$(x - 4)(x + 2)$		+	0	-	0	+	

Solutions : $[-2 ; 4]$.

15 Un quotient avec constante ★★★

On passe tout à gauche et on réduit : $\frac{2}{x+1} - 1 = \frac{2-(x+1)}{x+1} = \frac{1-x}{x+1}$. Il faut donc résoudre $\frac{1-x}{x+1} \geq 0$ (avec $x \neq -1$).

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$1 - x$		+		+	0	-	
$x + 1$		-	0	+		+	
quotient		-		+	0	-	

Solutions : $] -1 ; 1]$.

Contrôle : pour $x = 0$, $\frac{2}{1} = 2 \geq 1$ ✓ ; pour $x = -2$, $2 \div (-1) = -2$, qui n'est pas ≥ 1 ✓ ; pour $x = 1$, on trouve exactement 1 ✓.

16 Deux quotients ★★★

Valeurs interdites : 2 et -1. On passe tout à gauche et on réduit au même dénominateur :

$$\frac{1}{x-2} - \frac{3}{x+1} = \frac{(x+1)-3(x-2)}{(x-2)(x+1)} = \frac{7-2x}{(x-2)(x+1)}.$$

Il faut donc $\frac{7-2x}{(x-2)(x+1)} \leq 0$. Le numérateur s'annule en $\frac{7}{2} = 3,5$. Rangement : $-1 < 2 < 3,5$.

x	$-\infty$		-1		2		7/2		$+\infty$
$7 - 2x$		+		+		+	0	-	
$x - 2$		-		-	0	+		+	
$x + 1$		-	0	+		+		+	
quotient		+		-		+	0	-	

Solutions : $] -1 ; 2[\cup [3,5 ; +\infty[$ (car $7/2 = 3,5$).

Contrôle : $x = 0$ donne $-0,5 \leq 3$ ✓ ; $x = 3$ donne $1 \leq 0,75$ faux, et 3 n'est pas dans la solution ✓ ; $x = 4$ donne $0,5 \leq 0,6$ ✓.

17 Bénéfice d'un atelier ★★★

a. $B(x) = 9x - (x^2 + 14) = -x^2 + 9x - 14$. Et $(x - 2)(7 - x) = 7x - x^2 - 14 + 2x = -x^2 + 9x - 14$. Les deux expressions sont égales.

b. $x - 2$ s'annule en 2 (croissant), $7 - x$ s'annule en 7 (décroissant).

x	0		2		7		10
$x - 2$		-	0	+		+	
$7 - x$		+		+	0	-	
B(x)		-	0	+	0	-	

L'entreprise gagne de l'argent pour $x \in]2 ; 7[$, c'est-à-dire entre 200 et 700 pièces (exclus).

c. $B(x) - 4 = -x^2 + 9x - 18$. Et $(x - 3)(6 - x) = 6x - x^2 - 18 + 3x = -x^2 + 9x - 18$.
✓

d. $B(x) \geq 4 \Leftrightarrow B(x) - 4 \geq 0 \Leftrightarrow (x - 3)(6 - x) \geq 0$.

x	0		3		6		10
$x - 3$		-	0	+		+	
$6 - x$		+		+	0	-	
B(x) - 4		-	0	+	0	-	

Solutions : $x \in [3 ; 6]$. Le bénéfice est d'au moins 4 000 euros pour une production comprise entre 300 et 600 pièces.

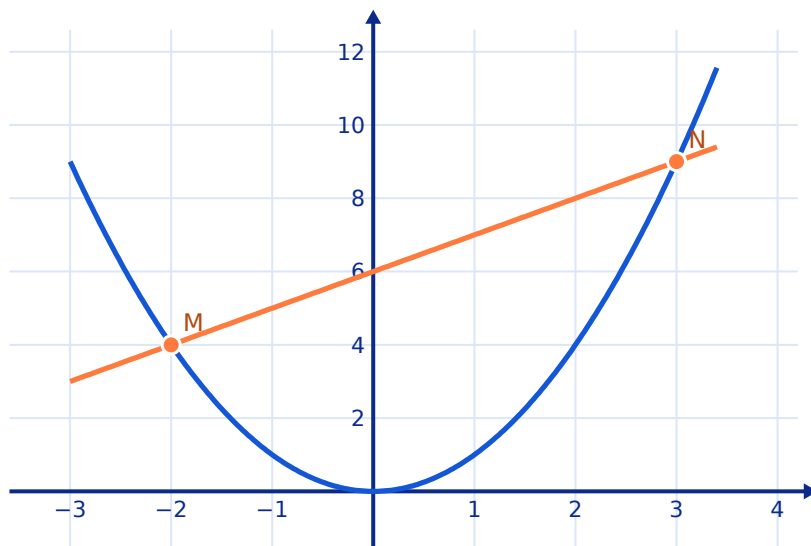
18 Parabole sous une droite ★★★

a. $(x - 3)(x + 2) = x^2 + 2x - 3x - 6 = x^2 - x - 6$. ✓

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$x - 3$		-		-	0	+	
$x + 2$		-	0	+		+	
$x^2 - x - 6$		+	0	-	0	+	

b. Les courbes se coupent quand $x^2 = x + 6$, soit pour $x = -2$ ou $x = 3$. On a $x^2 - (x + 6) > 0$ pour $x < -2$ et $x > 3$: la parabole est au-dessus de la droite. Elle est en dessous pour $x \in]-2 ; 3[$.

c. Pour $x = -2$: $y = 4$, pour $x = 3$: $y = 9$. Points d'intersection : M(-2 ; 4) et N(3 ; 9).



19 Comparer x et son inverse ★★★

$x - \frac{1}{x} = \frac{x^2}{x} - \frac{1}{x} = \frac{x^2 - 1}{x} = \frac{(x-1)(x+1)}{x}$ (identité remarquable).

Zéros : 1, -1 ; valeur interdite : 0. Rangement : $-1 < 0 < 1$.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$x - 1$		-		-		-	0	+	
$x + 1$		-	0	+		+		+	
x		-		-	0	+		+	
quotient		-	0	+		-	0	+	

$x > \frac{1}{x} \Leftrightarrow x \in]-1 ; 0[\cup]1 ; +\infty[.$

Contrôle : $x = -0,5$: $x = -0,5$ et $\frac{1}{x} = -2$, et $-0,5 > -2 \checkmark$; $x = 2$: $2 > 0,5 \checkmark$.

20 Ensemble de définition d'une racine ★★★

Il faut $\frac{2-x}{x+1} \geq 0$ avec $x \neq -1$. Le numérateur s'annule en 2 (positif avant), le dénominateur en -1 (négatif avant).

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$2 - x$		+		+	0	-	
$x + 1$		-	0	+		+	
quotient		-		+	0	-	

L'ensemble de définition de f est $]-1 ; 2]$.

21 Raisonner et justifier ★★★

- a. **Faux.** Contre-exemple : en un point où $f(x) = -2$ et $g(x) = -3$, le produit vaut $6 > 0$ mais aucun des deux n'est positif. Un produit positif signifie « même signe », pas « tous deux positifs ».
- b. **Vrai.** $x^2 + 1 \geq 1 > 0$ pour tout x . Le produit a donc le signe de $x - 3$: il est positif si et seulement si $x > 3$. Solutions : $]3 ; +\infty[$.
- c. **Faux.** Le produit de deux nombres négatifs est positif (règle des signes). Par exemple $(-2) \times (-3) = 6$.
- d. **Vrai.** La somme de deux nombres positifs est positive : $f(x) \geq 0$ et $g(x) \geq 0$ donnent $f(x) + g(x) \geq 0$.