

Signe d'une fonction

Cours de maths - 2de

Une fonction est tantôt au-dessus de zéro, tantôt en dessous. Savoir **où** elle est positive ou négative est un outil puissant : il permet de résoudre des inéquations, de comparer deux courbes, de savoir quand un bénéfice est réalisé. Dans ce chapitre, tu apprends à lire le signe d'une fonction sur sa courbe, à le trouver pour une fonction affine, puis à construire des **tableaux de signes** de produits et de quotients pour résoudre des inéquations.

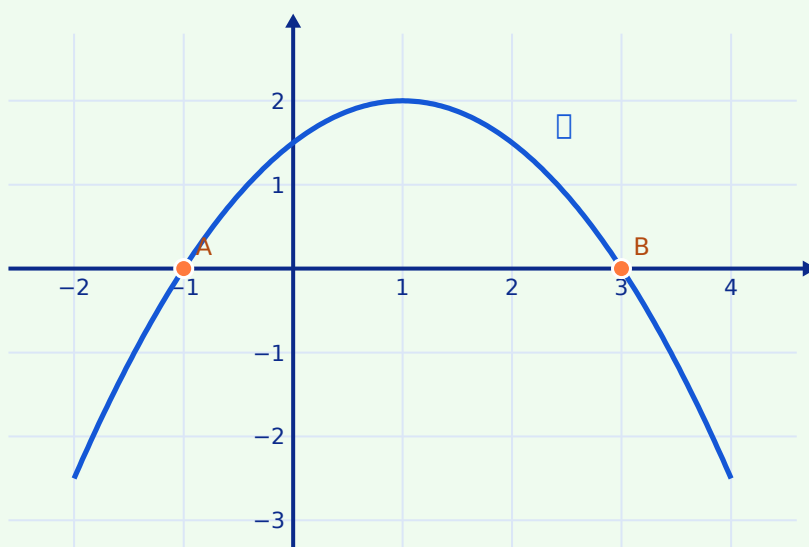
1. Le signe d'une fonction

Étudier le signe d'une fonction Soit f une fonction définie sur un ensemble D . Étudier le signe de f , c'est déterminer, pour chaque nombre x de D , si $f(x)$ est **strictement positif** ($f(x) > 0$), **strictement négatif** ($f(x) < 0$) ou **nul** ($f(x) = 0$). Les nombres x tels que $f(x) = 0$ s'appellent les **zéros** (ou racines) de f .

Sur la courbe Γ de f dans un repère, le signe se lit directement :

- si la courbe est **au-dessus** de l'axe des abscisses, $f(x)$ est positif ;
- si la courbe est **en dessous** de l'axe des abscisses, $f(x)$ est négatif ;
- si la courbe **coupe l'axe** des abscisses en un point d'abscisse a , alors $f(a) = 0$.

Lecture sur une courbe Voici la courbe d'une fonction g définie sur $[-2 ; 4]$. Elle coupe l'axe des abscisses aux points A et B, d'abscisses -1 et 3 .



On lit : $g(x) < 0$ sur $[-2 ; -1[$ et sur $]3 ; 4]$, $g(x) > 0$ sur $] -1 ; 3[$, et $g(-1) = g(3) = 0$.

On range ces informations dans un **tableau de signes** :

x	-2		-1		3		4
g(x)		-	0	+	0	-	

Signe n'est pas variation Une fonction peut être positive et décroissante (la courbe descend mais reste au-dessus de l'axe), ou négative et croissante. Le signe de f dépend de la *position* de la courbe par rapport à l'axe des abscisses, pas de sa pente.

2. Du tableau de signes aux ensembles de solutions

Lire un tableau de signes La première ligne donne les valeurs de x rangées dans l'ordre croissant, en commençant et en finissant par les bornes de l'ensemble d'étude. La deuxième ligne donne le signe de f(x) sur chaque intervalle, et un **0** sous chaque zéro. Une **double barre** signale une valeur pour laquelle f(x) n'existe pas.

Écrire un ensemble de solutions

1. Repère les intervalles où le signe demandé apparaît.
2. Pour une inégalité **stricte** ($>$ ou $<$), les zéros sont exclus : les crochets sont tournés vers l'extérieur.
3. Pour une inégalité **large** ($\geq$ ou $\leq$), les zéros sont inclus : les crochets sont tournés vers l'intérieur.
4. Si plusieurs intervalles conviennent, réunis-les avec le symbole $\cup$.

Avec la fonction g de la partie 1 $g(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-1 ; 3]$ (les zéros sont inclus). $g(x) < 0 \Leftrightarrow x \in [-2 ; -1[\cup]3 ; 4]$ (les zéros sont exclus ; en -2 et en 4, g est bien négative).

Les bornes de l'ensemble de définition Sur $[-2 ; 4]$, les crochets en -2 et en 4 sont toujours fermés : ces valeurs font partie de l'ensemble d'étude. Si l'étude porte sur $\mathbb{R}$, on écrit $-\infty$ et $+\infty$ avec des crochets ouverts.

3. Signe d'une fonction affine

Propriété Soit f la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$ avec $a \neq 0$. Elle s'annule en $x_0 = -b/a$. Alors :

- si **a > 0**, f(x) est négatif pour $x < x_0$, nul en x_0 , positif pour $x > x_0$;
- si **a < 0**, f(x) est positif pour $x < x_0$, nul en x_0 , négatif pour $x > x_0$.

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$a > 0 : f(x)$		-	0	+	
$a < 0 : f(x)$		+	0	-	

Démonstration. Supposons $a > 0$. On a $ax + b > 0 \Leftrightarrow ax > -b \Leftrightarrow x > -\mathbf{b/a}$: on a divisé par a , un nombre positif, donc le sens de l'inégalité ne change pas. Si $a < 0$, diviser par a change le sens : $ax + b > 0 \Leftrightarrow x < -\mathbf{b/a}$. Le cas $f(x) = 0$ donne $x = -\mathbf{b/a}$ dans les deux cas.

Dresser le tableau de signes de $ax + b$

1. Calcule le zéro : on résout $ax + b = 0$, donc $x_0 = -\mathbf{b/a}$.
2. Regarde le signe de a : il donne le signe de $f(x)$ **à droite** du zéro. À gauche, c'est le signe opposé.
3. Remplis le tableau : $-\infty$, x_0 , $+\infty$ en première ligne, puis les signes, avec un 0 sous x_0 .

Exemple Pour $f(x) = -2x + 5$: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \mathbf{5/2}$. Comme $a = -2 < 0$, f est positive avant $\mathbf{5/2}$ et négative après.

x	$-\infty$		$\mathbf{5/2}$		$+\infty$
$-2x + 5$		+	0	-	

Ainsi $-2x + 5 > 0 \Leftrightarrow x < \mathbf{5/2}$, c'est-à-dire $x \in]-\infty ; 2,5[$.

Le signe à droite Pour un facteur de la forme $ax + b$, le signe de a se retrouve toujours dans la case la plus à droite du tableau. Vérifie-le avec un nombre très grand : pour $x = 1\,000$, le terme ax domine b .

Cas particulier Si $a = 0$, la fonction est constante égale à b : elle a partout le signe de b (et ne s'annule jamais si $b \neq 0$).

4. Signe des fonctions de référence

Les fonctions de référence ont des signes à connaître par cœur (tu peux les retrouver à l'aide de leur courbe).

Fonction	Ensemble	Signe
$x \mapsto x^2$	$\mathbb{R}$	positive partout, nulle seulement en 0
$x \mapsto x^3$	$\mathbb{R}$	négative si $x < 0$, positive si $x > 0$
$x \mapsto \mathbf{1/x}$	$\mathbb{R}$ privé de 0	négative si $x < 0$, positive si $x > 0$ (0 est une valeur interdite)
$x \mapsto \sqrt{x}$	$[0 ; +\infty[$	positive partout, nulle seulement en 0

Multiplier par une constante Si $k > 0$, les fonctions f et kf ont le même signe. Si $k < 0$, elles ont des signes opposés. Par exemple, $-3x^2$ est négative partout et nulle en 0.

Une somme avec un terme toujours positif $x^2 + 1$ est strictement positive pour tout réel x , car $x^2 \geq 0$ donc $x^2 + 1 \geq 1$. Un facteur comme $x^2 + 1$ ne change donc jamais

le signe d'un produit : on peut l'ignorer dans un tableau de signes.

5. Signe d'un produit

Règle des signes Le produit de deux nombres de même signe est positif ; le produit de deux nombres de signes contraires est négatif. Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul.

Tableau de signes d'un produit

1. Cherche le zéro de chaque facteur (ils sont affines ou de référence).
2. Range tous ces zéros dans l'ordre croissant sur la première ligne.
3. Écris une ligne par facteur avec son signe sur chaque intervalle (et un 0 sous son zéro).
4. La dernière ligne donne le produit : on applique la règle des signes colonne par colonne. Un 0 apparaît sous chaque zéro d'un facteur.

Exemple Étudions le signe de $P(x) = (2x - 4)(5 - x)$. Le facteur $2x - 4$ s'annule en 2 et est croissant. Le facteur $5 - x$ s'annule en 5 et est décroissant.

x	$-\infty$		2		5		$+\infty$
$2x - 4$		-	0	+		+	
$5 - x$		+		+	0	-	
P(x)		-	0	+	0	-	

Donc $P(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]2 ; 5[$ et $P(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty ; 2] \cup [5 ; +\infty[$.

Range les zéros dans l'ordre Compare bien les zéros avant de les placer : par exemple $-1/2$ est plus petit que $1/3$, et -3 est plus petit que -2 . Une erreur d'ordre fausse tout le tableau.

6. Signe d'un quotient

Les signes de **A/B** suivent la même règle des signes que pour un produit. La différence : le dénominateur ne doit **jamais être nul**.

Propriété Le quotient **A(x)/B(x)** est défini pour $B(x) \neq 0$. Il est positif quand A(x) et B(x) ont le même signe, négatif quand ils ont des signes contraires, nul quand $A(x) = 0$ (avec $B(x) \neq 0$). Sous un zéro du dénominateur, on met une **double barre**, jamais un 0.

Exemple Soit $Q(x) = \frac{x-3}{2x+4}$. Le numérateur s'annule en 3, le dénominateur en -2 (valeur interdite).

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$x - 3$		-		-	0	+	
$2x + 4$		-	0	+		+	
Q(x)		+		-	0	+	

Q est définie sur $\mathbb{R}$ privé de -2 . On a $Q(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty ; -2[\cup [3 ; +\infty[$: le nombre 3 est inclus car il annule le numérateur, le nombre -2 est exclu car il annule le dénominateur.

Valeur interdite Un crochet est **toujours ouvert** sur une valeur qui annule le dénominateur, même pour une inégalité large ($\geq$ ou $\leq$).

7. Résoudre une inéquation avec un tableau de signes

Méthode en quatre temps

1. **Tout à gauche** : transforme l'inéquation pour comparer une expression à 0 (on passe tous les termes du même côté).
2. **Factorise ou réduis au même dénominateur** : l'expression doit devenir un produit ou un quotient de facteurs dont on connaît le signe.
3. **Tableau de signes** de ce produit ou quotient.
4. **Conclus** par un ensemble de solutions, en respectant les crochets.

Un quotient Résolvons $4 - x/x + 2 \geq 0$. Le numérateur s'annule en 4 (positif avant), le dénominateur en -2 (négatif avant, valeur interdite).

x	$-\infty$		-2		4		$+\infty$
$4 - x$		+		+	0	-	
$x + 2$		-	0	+		+	
quotient		-		+	0	-	

L'ensemble des solutions est $] -2 ; 4]$: -2 est exclu (valeur interdite), 4 est inclus (le quotient y vaut 0).

Comparer deux expressions Résolvons $x^2 > 3x$. On passe tout à gauche : $x^2 - 3x > 0$. On factorise : $x(x - 3) > 0$.

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
x		-	0	+		+	
$x - 3$		-		-	0	+	
x(x - 3)		+	0	-	0	+	

Solutions : $] -\infty ; 0[\cup]3 ; +\infty[$.

Deux interdictions Ne **simplifie jamais par x** dans $x^2 > 3x$: tu perdras la moitié des solutions (x est négatif pour certaines solutions, et le sens changerait). Ne **multiplie jamais** en croix une inéquation avec un dénominateur dont tu ne connais pas le signe.

8. Applications

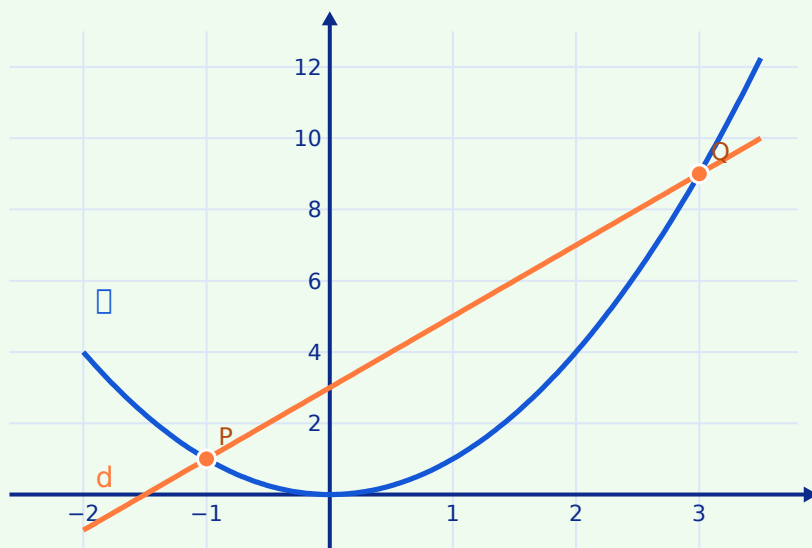
Position relative de deux courbes

Pour savoir quelle courbe est au-dessus de l'autre, on étudie le signe de la **différence** $f(x) - g(x)$: si elle est positive, la courbe de f est au-dessus de celle de g .

Parabole et droite Soit $f(x) = x^2$ et $g(x) = 2x + 3$. On a $f(x) - g(x) = x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3)$ (on développe : $x^2 - 3x + x - 3 = x^2 - 2x - 3$).

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$x + 1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x - 3$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x) - g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

La parabole est au-dessus de la droite pour $x < -1$ et pour $x > 3$, en dessous entre -1 et 3 , et elles se coupent en $P(-1 ; 1)$ et $Q(3 ; 9)$.



Un problème de bénéfice

Quand l'atelier gagne-t-il de l'argent ? Un atelier fabrique x dizaines de bougies ($x \in [0 ; 12]$). Son bénéfice, en centaines d'euros, est $B(x) = (x - 2)(10 - x)$.

x	0		2		10		12
$x - 2$		$-$	0	$+$		$+$	
$10 - x$		$+$		$+$	0	$-$	
$B(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Le bénéfice est strictement positif pour $x \in]2 ; 10[$: l'atelier gagne de l'argent s'il fabrique entre 2 et 10 dizaines de bougies (exclues), et il perd de l'argent en dessous de 2 ou au-dessus de 10 dizaines.

Mathbot t'aide Mathbot, ton robot-coach, te donne un réflexe : « Pour toute inéquation, je compare à 0, je factorise, je dresse le tableau, puis seulement je conclus. » Cet ordre ne trahit jamais.

À retenir

- Le signe de $f(x)$ se lit sur la courbe : au-dessus de l'axe des abscisses, $f(x) > 0$; en dessous, $f(x) < 0$; sur l'axe, $f(x) = 0$.
- Un tableau de signes range les zéros dans l'ordre croissant et donne le signe sur chaque intervalle.
- Pour $f(x) = ax + b$ ($a \neq 0$) : zéro en $-\mathbf{b/a}$; le signe de a est à droite du zéro, le signe opposé à gauche.
- $x^2 \geq 0$; x et x^3 ont le signe de x ; $\mathbf{1/x}$ a le signe de x ($x \neq 0$) ; $\sqrt{x} \geq 0$.
- Un produit ou un quotient : une ligne par facteur, puis la règle des signes ; double barre sous une valeur interdite.
- Pour résoudre une inéquation : tout à gauche, factoriser ou réduire, tableau de signes, conclure avec les bons crochets.
- Pour comparer deux courbes, on étudie le signe de $f(x) - g(x)$.