

Sommes de variables aléatoires et loi des grands nombres

Contrôle de maths - Terminale

Durée conseillée : 45 minutes. Barème sur 20 points. Calculatrice interdite.

1 Linéarité et variance / 3 pts

Les variables X et Y sont indépendantes, avec $E(X) = 4$, $V(X) = 2,25$, $E(Y) = -1$ et $V(Y) = 4$. On pose $W = 3X - 2Y + 5$. Calcule $E(W)$, $V(W)$ et $\sigma(W)$ (arrondi au centième).

2 Somme et moyenne d'un échantillon / 4 pts

Une variable X a la loi : $P(X = 1) = 0,2$; $P(X = 2) = 0,5$; $P(X = 3) = 0,3$.

- Calcule $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.
- On considère un échantillon de taille 100 de cette loi. Donne l'espérance, la variance et l'écart-type de la somme S_{100} puis de la moyenne M_{100} .

3 Markov et Bienaymé-Tchebychev / 3 pts

- Y est une variable positive d'espérance 2,5. Majore $P(Y \geq 10)$.
- Z a pour espérance 20 et pour variance 25. Majore $P(|Z - 20| \geq 10)$, puis minore $P(10 < Z < 30)$.

4 Inégalité de concentration / 4 pts

Une urne contient 30 % de boules rouges. On tire n boules avec remise ; F_n est la proportion de boules rouges obtenues. (La variance d'une variable de Bernoulli de paramètre 0,3 est 0,21.)

- Pour $n = 200$, majore $P(|F_{200} - 0,3| \geq 0,1)$.
- Déduis-en un intervalle autour de 0,3 dans lequel F_{200} se trouve avec une probabilité au moins égale à 0,89.
- Trouve une valeur de n telle que $P(|F_n - 0,3| \geq 0,1) \leq 0,02$.

5 Vrai ou faux ? / 3 pts

Dis si chaque affirmation est vraie ou fausse, en justifiant.

- a. Pour toutes variables aléatoires X et Y , $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$.
- b. Une pièce équilibrée a donné « pile » cinq fois de suite : d'après la loi des grands nombres, « face » est plus probable au lancer suivant.
- c. Pour un échantillon, la borne $V \div (n\delta^2)$ de l'inégalité de concentration tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

6 Simulation Python / 3 pts

On exécute le programme suivant.

```
import random

def moyenne(n):
    s = 0
    for _ in range(n):
        s = s + random.randint(1, 6)
    return s / n

print(moyenne(1000))
```

- a. Quelle valeur approximative s'affiche, et pourquoi ?
- b. Majore la probabilité que l'affichage s'écarte de cette valeur d'au moins 0,1 (variance d'un dé : **35/12**). Donne la valeur approchée au centième.
- c. Quelle borne obtient-on avec 10 000 lancers ?