

Sommes de variables aléatoires et loi des grands nombres

Corrigé du contrôle - Terminale

Durée conseillée : 45 minutes. Barème sur 20 points. Calculatrice interdite.

1 Linéarité et variance / 3 pts

Calculatrice autorisée.

(1 pt) Linéarité : $E(W) = 3 \times 4 - 2 \times (-1) + 5 = 12 + 2 + 5 = 19$.

(1 pt) Indépendance : $V(W) = 3^2 \times 2,25 + (-2)^2 \times 4 = 20,25 + 16 = 36,25$.

(1 pt) $\sigma(W) = \sqrt{36,25} \approx 6,02$.

2 Somme et moyenne d'un échantillon / 4 pts

a. (2 pts) $E(X) = 0,2 + 1 + 0,9 = 2,1$; $E(X^2) = 0,2 + 2 + 2,7 = 4,9$; $V(X) = 4,9 - 2,1^2 = 4,9 - 4,41 = 0,49$; $\sigma(X) = 0,7$.

b. (2 pts) $E(S_{100}) = 210$; $V(S_{100}) = 100 \times 0,49 = 49$; $\sigma(S_{100}) = 7$. $E(M_{100}) = 2,1$; $V(M_{100}) = 0,49 \div 100 = 0,0049$; $\sigma(M_{100}) = 0,07$.

3 Markov et Bienaymé-Tchebychev / 3 pts

a. (1 pt) Markov : $P(Y \geq 10) \leq \mathbf{2,5/10} = 0,25$.

b. (1 pt) Bienaymé-Tchebychev : $P(|Z - 20| \geq 10) \leq \mathbf{25/100} = 0,25$. (1 pt)
L'événement « $10 < Z < 30$ » est « $|Z - 20| < 10$ », de probabilité au moins $1 - 0,25 = 0,75$.

4 Inégalité de concentration / 4 pts

Calculatrice autorisée.

a. (1,5 pt) Concentration : $P(|F_{200} - 0,3| \geq 0,1) \leq 0,21 \div (200 \times 0,01) = 0,21 \div 2 = 0,105$.

b. (1 pt) $P(|F_{200} - 0,3| < 0,1) \geq 1 - 0,105 = 0,895 \geq 0,89$: $F_{200} \in]0,2 ; 0,4[$ avec une probabilité d'au moins 0,89.

c. (1,5 pt) On veut $0,21 \div (n \times 0,01) \leq 0,02$, soit $n \geq 0,21 \div 0,0002 = 1050$.

5 Vrai ou faux ? / 3 pts

- a. (1 pt) Faux : il faut l'indépendance. Si $Y = X$, $V(X + Y) = 4V(X) \neq 2V(X)$.
- b. (1 pt) Faux : les lancers sont indépendants, la probabilité de « face » reste **1/2** ; la loi des grands nombres porte sur la fréquence à long terme, pas sur une compensation.
- c. (1 pt) Vrai : V et δ sont fixés, donc **$V/n\delta^2$** tend vers 0 ; c'est ce qui permet de démontrer la loi des grands nombres.

6 Simulation Python / 3 pts

Calculatrice autorisée.

- a. (1 pt) Le programme renvoie la moyenne M_{1000} de 1000 lancers de dé ; d'après la loi des grands nombres, la valeur est proche de l'espérance 3,5.
- b. (1 pt) $P(|M_{1000} - 3,5| \geq 0,1) \leq \mathbf{35/12} \div (1000 \times 0,01) = \mathbf{7/24} \approx 0,29$.
- c. (1 pt) Avec $n = 10\,000$: **$35/12 \div (10\,000 \times 0,01) = 7/240 \approx 0,03$** .