

Sommes de variables aléatoires et loi des grands nombres

Corrigé des exercices - Terminale

Corrigé détaillé des exercices du chapitre. Vérifie tes réponses étape par étape et corrige-toi.

1 Espérance et variance d'une loi ★★★

- a. Les probabilités sont comprises entre 0 et 1 et $0,1 + 0,4 + 0,3 + 0,2 = 1$.
- b. $E(X) = 0 \times 0,1 + 1 \times 0,4 + 2 \times 0,3 + 4 \times 0,2 = 0,4 + 0,6 + 0,8 = 1,8$. $E(X^2) = 0 + 1 \times 0,4 + 4 \times 0,3 + 16 \times 0,2 = 0,4 + 1,2 + 3,2 = 4,8$. $V(X) = 4,8 - 1,8^2 = 4,8 - 3,24 = 1,56$ et $\sigma(X) = \sqrt{1,56} \approx 1,25$.

2 Transformation affine ★★★

Pour Y : $E(Y) = 5 \times 3 - 2 = 13$; $V(Y) = 5^2 \times 4 = 100$; $\sigma(Y) = \sqrt{100} = 10$.

Pour Z : $E(Z) = -2 \times 3 + 7 = 1$; $V(Z) = (-2)^2 \times 4 = 16$; $\sigma(Z) = 4$. Le signe moins ne change pas la variance.

3 Somme de deux variables indépendantes ★★★

Par linéarité : $E(X + Y) = 2,5 + 4 = 6,5$; $E(X - Y) = 2,5 - 4 = -1,5$; $E(2X + 3Y) = 5 + 12 = 17$.

Par indépendance : $V(X + Y) = 1,5 + 2 = 3,5$; $V(X - Y) = V(X) + V(Y) = 3,5$ (les variances s'ajoutent) ; $V(2X + 3Y) = 4 \times 1,5 + 9 \times 2 = 6 + 18 = 24$.

4 Trois dés ★★★

Les trois lancers sont indépendants. $E(T) = 3 \times 3,5 = 10,5$. $V(T) = 3 \times \frac{35}{12} = \frac{35}{4} = 8,75$. $\sigma(T) = \sqrt{8,75} \approx 2,96$.

5 Succès et loi binomiale ★★★

- a. $X = B_1 + B_2 + B_3 + B_4 + B_5$, où B_i vaut 1 en cas de succès à l'épreuve i et 0 sinon ; ces variables sont indépendantes, d'espérance 0,3 et de variance $0,3 \times 0,7 =$

0,21.

- b. $E(X) = 5 \times 0,3 = 1,5$ par linéarité ; $V(X) = 5 \times 0,21 = 1,05$ par indépendance. On retrouve np et $np(1 - p)$.

6 Somme et moyenne d'un échantillon ★★★

Somme : $E(S_{25}) = 25 \times 12 = 300$; $V(S_{25}) = 25 \times 5^2 = 625$; $\sigma(S_{25}) = 25$.

Moyenne : $E(M_{25}) = 12$; $V(M_{25}) = 25 \div 25 = 1$; $\sigma(M_{25}) = 1 (= 5 \div \sqrt{25})$.

7 Vrai ou faux ? ★★★

- a. Vrai : c'est la linéarité de l'espérance, qui n'exige pas l'indépendance.
b. Faux : il faut l'indépendance. Avec $Y = X$, $V(X + Y) = V(2X) = 4V(X)$, alors que $V(X) + V(Y) = 2V(X)$ (si $V(X) \neq 0$).
c. Faux : $V(2X) = 2^2 V(X) = 4V(X)$.
d. Vrai : $E(M_n) = \mu$ pour tout n .

8 Inégalité de Markov ★★★

Markov : $P(X \geq a) \leq 4/a$. Pour $a = 10$: $P(X \geq 10) \leq 0,4$. Pour $a = 20$: $P(X \geq 20) \leq 0,2$.
Pour $a = 2$: $P(X \geq 2) \leq 2$, ce qui est inutile car une probabilité est toujours inférieure ou égale à 1. La borne n'est intéressante que pour a plus grand que $E(X)$.

9 Temps d'attente ★★★

Soit X le temps d'attente en minutes : $X \geq 0$ et $E(X) = 6$. Par Markov, $P(X \geq 30) \leq 6/30 = 0,2$ et $P(X \geq 15) \leq 6/15 = 0,4$. Au plus 20 % des clients attendent 30 minutes ou plus.

10 Bienaymé-Tchebychev (1) ★★★

- a. Bienaymé-Tchebychev avec $\delta = 8$: $P(|X - 50| \geq 8) \leq 16/64 = 0,25$.
b. Avec $\delta = 12$: $P(|X - 50| \geq 12) \leq 16/144 = 1/9$, donc $P(|X - 50| < 12) \geq 1 - 1/9 = 8/9 \approx 0,889$. Cela signifie que X appartient à $]38 ; 62[$ avec une probabilité au moins égale à $8/9$.

11 Choisir la marge δ ★★★

On veut $1 - 4/\delta^2 = 0,96$, soit $4/\delta^2 = 0,04$, d'où $\delta^2 = 100$ et $\delta = 10$. Avec $\delta = 10$, on a bien $P(|X - E(X)| < 10) \geq 1 - 0,04 = 0,96$.

12 Moyenne de cent lancers ★★★

- a. $P(|M_{100} - 3,5| \geq 0,5) \leq \mathbf{35/12} \div (100 \times 0,25) = \mathbf{35/300} = \mathbf{7/60} \approx 0,117$.
- b. Avec $n = 1000$: $\mathbf{35/12} \div (1000 \times 0,25) = \mathbf{35/3000} = \mathbf{7/600} \approx 0,0117$. Dix fois plus de lancers divisent la borne par dix.

13 Combien de lancers de pièce ? ★★★

La borne vaut $0,25 \div (n \times 0,05^2) = 0,25 \div (0,0025 n)$. On veut $0,25 \div (0,0025 n) \leq 0,05$, soit $n \geq 0,25 \div (0,0025 \times 0,05) = 0,25 \div 0,000125 = 2000$. Il suffit donc de 2000 lancers.

14 Sondage ★★★

- a. Concentration : $P(|F - 0,4| \geq 0,05) \leq 0,24 \div (500 \times 0,0025) = 0,24 \div 1,25 = 0,192$.
- b. Donc $P(|F - 0,4| < 0,05) \geq 1 - 0,192 = 0,808 > 0,8$: avec une probabilité d'au moins 0,8, F appartient à $]0,35 ; 0,45[$.

15 Le piège de la compensation ★★★

Non. Les lancers sont indépendants : la probabilité d'obtenir « face » au onzième lancer vaut toujours **1/2**. La loi des grands nombres dit que la **fréquence** de « pile » sur un très grand nombre de lancers se rapproche de 0,5 : les dix premiers « pile » deviennent négligeables dans une très longue série (10 sur 10 000 lancers ne pèsent presque rien), sans qu'aucun mécanisme de compensation n'intervienne.

16 Loi de la somme de deux dés ★★★

- a. Il y a 36 couples équiprobables. Le nombre de couples donnant la somme s est 1, 2, 3, 4, 5, 6, 5, 4, 3, 2, 1 pour $s = 2, 3, \dots, 12$: $P(S = s) = \mathbf{1/36, 2/36, 3/36, 4/36, 5/36, 6/36, 5/36, 4/36, 3/36, 2/36, 1/36}$.
- b. Par symétrie $E(S) = 7$; on vérifie : $(2 \times 1 + 3 \times 2 + 4 \times 3 + 5 \times 4 + 6 \times 5 + 7 \times 6 + 8 \times 5 + 9 \times 4 + 10 \times 3 + 11 \times 2 + 12 \times 1) \div 36 = 252 \div 36 = 7$. Puis $E(S^2) = (4 \times 1 + 9 \times 2 + 16 \times 3 + 25 \times 4 + 36 \times 5 + 49 \times 6 + 64 \times 5 + 81 \times 4 + 100 \times 3 + 121 \times 2 + 144 \times 1) \div 36 = 1974 \div 36 = \mathbf{329/6}$, donc $V(S) = \mathbf{329/6} - 49 = \mathbf{35/6}$.
- c. $E(S) = 3,5 + 3,5 = 7$ et, les dés étant indépendants, $V(S) = \mathbf{35/12} + \mathbf{35/12} = \mathbf{35/6}$. Les deux méthodes concordent.

17 Un jeu de casino ★★★

- a. $E(X) = -0,6 + 0,3 + 0,5 = 0,2$. $E(X^2) = 0,6 + 0,3 + 2,5 = 3,4$, donc $V(X) = 3,4 - 0,04 = 3,36$.
- b. S est la somme d'un échantillon de taille 400 : $E(S) = 400 \times 0,2 = 80$ et $V(S) = 400 \times 3,36 = 1344$.
- c. Si $S < 0$, alors $S - 80 < -80$, donc $|S - 80| > 80$, d'où $P(S < 0) \leq P(|S - 80| \geq 80) \leq \mathbf{1344/6400} = 0,21$. Le joueur a au plus 21 % de chances d'être perdant (en réalité bien moins : la borne est pessimiste).

18 Lancers de dé et binomiale ★★★

- a. $X = B_1 + \dots + B_{60}$ avec B_i de Bernoulli de paramètre **1/6** (indépendantes). $E(X) = 60 \times \mathbf{1/6} = 10$ et $V(X) = 60 \times \mathbf{1/6} \times \mathbf{5/6} = \mathbf{300/36} = \mathbf{25/3}$.
- b. $P(|X - 10| \geq 6) \leq \mathbf{25/3} \div 36 = \mathbf{25/108} \approx 0,23$.

19 Démonstration de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev ★★★

- a. Un carré est positif, donc $Y \geq 0$. Par définition de la variance, $E(Y) = E((X - \mu)^2) = V$.
- b. Pour des nombres positifs, $|X - \mu| \geq \delta$ équivaut à $(X - \mu)^2 \geq \delta^2$ (la fonction carré est croissante sur $[0 ; +\infty[$). Les deux événements sont donc identiques.
- c. Markov avec $a = \delta^2 > 0$: $P(Y \geq \delta^2) \leq (E(Y)) \div \delta^2 = \mathbf{V/\delta^2}$. D'après b., $P(|X - \mu| \geq \delta) \leq \mathbf{V/\delta^2}$.

20 La borne est-elle bonne ? ★★★

- a. $E(X) = 20 \times 0,5 = 10$ et $V(X) = 20 \times 0,5 \times 0,5 = 5$.
- b. $P(|X - 10| \geq 5) \leq \mathbf{5/25} = 0,2$.
- c. $|X - 10| \geq 5$ équivaut à $X \leq 5$ ou $X \geq 15$. Par symétrie, la probabilité vaut $2 \times P(X \leq 5) = 2 \times (1 + 20 + 190 + 1140 + 4845 + 15504) \div 2^{20} = 2 \times 21\,700 \div 1\,048\,576 = 43\,400 \div 1\,048\,576 \approx 0,0414$.
- d. La borne 0,2 est environ cinq fois plus grande que la vraie valeur 0,0414 : elle est correcte mais très pessimiste.

21 Précision exigée ★★★

- a. $V = 2,4^2 = 5,76$. On veut $5,76 \div (n \times 0,04) \leq 0,01$, soit $n \geq 5,76 \div (0,04 \times 0,01) = 5,76 \div 0,0004 = 14\,400$.
- b. Avec $\delta = 0,1$: $n \geq 5,76 \div (0,01 \times 0,01) = 57\,600$. Diviser la précision δ par 2 multiplie le nombre de mesures par 4 (δ intervient au carré).

22 Estimer une proportion inconnue ★★★

- a. On a $0,25 - p(1 - p) = p^2 - p + 0,25 = (p - 0,5)^2 \geq 0$, donc $p(1 - p) \leq 0,25$ (maximum atteint pour $p = 0,5$).
- b. $V = p(1 - p) \leq 0,25$, donc $P(|F_n - p| \geq 0,02) \leq 0,25 \div (n \times 0,0004)$. On veut cette borne $\leq 0,05$, soit $n \geq 0,25 \div (0,0004 \times 0,05) = 0,25 \div 0,00002 = 12\,500$. Un échantillon de 12 500 individus convient pour tout p .

23 Lire un programme Python ★★★

- a. Le programme répète n fois une épreuve de Bernoulli de paramètre 0,3 (`random.random() < 0.3` est vrai avec la probabilité 0,3) ; `freq(n)` renvoie la fréquence des succès, c'est-à-dire la moyenne M_n de l'échantillon.
- b. Les affichages se rapprochent de 0,3 quand n grandit (`freq(10000)` est en général plus proche de 0,3 que `freq(100)`) : c'est la loi des grands nombres, avec $\mu = p = 0,3$.
- c. $P(|M_{10000} - 0,3| \geq 0,02) \leq 0,21 \div (10\,000 \times 0,0004) = 0,21 \div 4 = 0,0525$. La fréquence est donc dans $]0,28 ; 0,32[$ avec une probabilité d'au moins 0,9475.

24 Écart-type de la moyenne et taille minimale ★★★

- a. $E(M_{36}) = 25$ et $\sigma(M_{36}) = 6 \div \sqrt{36} = 1$ minute.
- b. $V = 36$, donc $P(|M_{36} - 25| \geq 3) \leq 36 \div (36 \times 9) = \mathbf{1/9} \approx 0,111$.
- c. On veut $36 \div (n \times 1) \leq 0,05$, soit $n \geq 36 \div 0,05 = 720$.