

Sommes de variables aléatoires et loi des grands nombres

Exercices de maths - Terminale

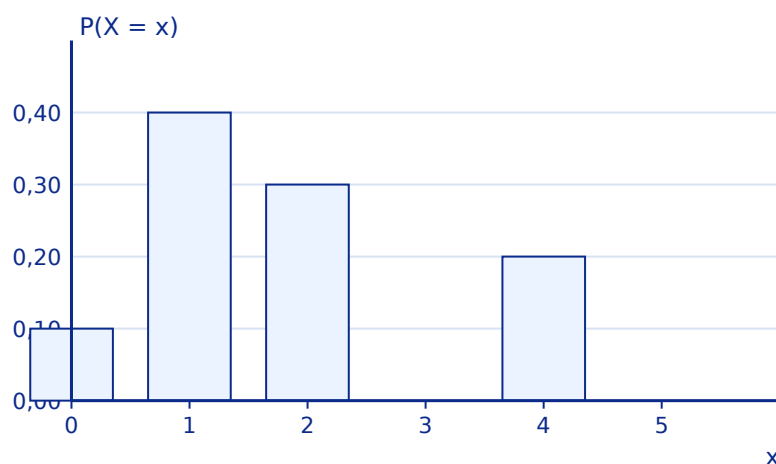
24 exercices classés par difficulté (★ facile, ★★ moyen, ★★★ difficile). Cherche d'abord sans regarder le corrigé !

1 Espérance et variance d'une loi ★★★

La variable aléatoire X a la loi suivante.

x_i	0	1	2	4
$P(X = x_i)$	0,1	0,4	0,3	0,2

- Vérifie que c'est bien une loi de probabilité.
- Calcule $E(X)$, puis $V(X)$ et $\sigma(X)$ (arrondi au centième).



2 Transformation affine ★★★

Une variable X a pour espérance 3 et pour variance 4. Calcule l'espérance, la variance et l'écart-type de $Y = 5X - 2$, puis de $Z = -2X + 7$.

3 Somme de deux variables indépendantes ★★★

X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes telles que $E(X) = 2,5$, $V(X) = 1,5$, $E(Y) = 4$ et $V(Y) = 2$. Calcule $E(X + Y)$, $V(X + Y)$, $E(X - Y)$, $V(X - Y)$, $E(2X + 3Y)$ et $V(2X + 3Y)$.

4 Trois dés ★★★

On lance trois dés équilibrés à six faces et on note T la somme des trois numéros.
Rappel : pour un dé, l'espérance est 3,5 et la variance **35/12**. Calcule $E(T)$, $V(T)$ et $\sigma(T)$ (arrondi au centième).

5 Succès et loi binomiale ★★★

On répète 5 fois, de façon indépendante, une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = 0,3$. Soit X le nombre de succès.

- Écris X comme somme de variables aléatoires simples.
- Déduis-en $E(X)$ et $V(X)$.

6 Somme et moyenne d'un échantillon ★★★

Un échantillon de taille 25 est constitué de variables d'espérance 12 et d'écart-type 5.
Donne l'espérance, la variance et l'écart-type de la somme S_{25} , puis de la moyenne M_{25} .

7 Vrai ou faux ? ★★★

Pour chaque affirmation, dis si elle est vraie ou fausse et justifie.

- Pour toutes variables X et Y , $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.
- Pour toutes variables X et Y , $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$.
- $V(2X) = 2V(X)$.
- L'espérance de la moyenne M_n d'un échantillon ne dépend pas de n .

8 Inégalité de Markov ★★★

Une variable aléatoire X est à valeurs positives et $E(X) = 4$. Donne une majoration de $P(X \geq 10)$, de $P(X \geq 20)$, puis de $P(X \geq 2)$. Que penses-tu de la dernière ?

9 Temps d'attente ★★★

À un guichet, le temps d'attente d'un client est en moyenne de 6 minutes. Majore la probabilité qu'un client attende au moins 30 minutes, puis au moins 15 minutes.

10 Bienaymé-Tchebychev (1) ★★★

X est une variable aléatoire d'espérance 50 et de variance 16.

- a. Majore $P(|X - 50| \geq 8)$.
- b. Minore $P(|X - 50| < 12)$. Dans quel intervalle X se trouve-t-elle alors ?

11 Choisir la marge δ ★★★

Une variable aléatoire X a pour variance 4. Pour quelle valeur de δ l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev garantit-elle $P(|X - E(X)| < \delta) \geq 0,96$?

12 Moyenne de cent lancers ★★★

On lance 100 fois un dé équilibré ; M_{100} est la moyenne des résultats ($\mu = 3,5$ et $V = 35/12$).

- a. Majore $P(|M_{100} - 3,5| \geq 0,5)$.
- b. Même question avec 1000 lancers.

13 Combien de lancers de pièce ? ★★★

On lance n fois une pièce équilibrée et on note F_n la fréquence de « pile » (variables de Bernoulli de paramètre 0,5, de variance 0,25). Quelle valeur de n garantit, d'après l'inégalité de concentration, $P(|F_n - 0,5| \geq 0,05) \leq 0,05$?

14 Sondage ★★★

Dans un lycée, 40 % des élèves viennent en bus. On interroge au hasard, avec remise, $n = 500$ élèves ; F est la proportion d'élèves de l'échantillon qui viennent en bus. La variance d'une variable de Bernoulli de paramètre 0,4 est 0,24.

- a. Majore $P(|F - 0,4| \geq 0,05)$.
- b. Déduis-en un intervalle contenant F avec une probabilité au moins égale à 0,8.

15 Le piège de la compensation ★★★

Léa lance une pièce équilibrée et obtient « pile » dix fois de suite. Elle affirme : « D'après la loi des grands nombres, le prochain sera forcément face pour que ça s'équilibre. » A-t-elle raison ? Que dit réellement la loi des grands nombres ?

16 Loi de la somme de deux dés ★★★

On lance deux dés équilibrés et on note S la somme obtenue.

- a. Dresse la loi de S .

- b. Calcule $E(S)$ et $V(S)$ à partir de cette loi.
- c. Retrouve ces valeurs en utilisant la linéarité et l'indépendance.

17 Un jeu de casino ★★★

À chaque partie, un joueur gagne algébriquement X euros avec la loi : $X = -1$ avec la probabilité 0,6 ; $X = 1$ avec la probabilité 0,3 ; $X = 5$ avec la probabilité 0,1. Il joue 400 parties indépendantes ; S est son gain total.

- a. Calcule $E(X)$ et $V(X)$.
- b. Calcule $E(S)$ et $V(S)$.
- c. Majore la probabilité que le joueur ait perdu de l'argent ($S < 0$).

18 Lancers de dé et binomiale ★★★

Soit X le nombre de « 6 » obtenus en 60 lancers d'un dé équilibré.

- a. Écris X comme une somme de variables de Bernoulli indépendantes et déduis $E(X)$ et $V(X)$.
- b. Majore $P(|X - 10| \geq 6)$ avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

19 Démonstration de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev ★★★

Soit X une variable aléatoire d'espérance μ et de variance V , et $\delta > 0$. On pose $Y = (X - \mu)^2$.

- a. Justifie que Y est positive et donne $E(Y)$.
- b. Montre que les événements « $|X - \mu| \geq \delta$ » et « $Y \geq \delta^2$ » sont égaux.
- c. Applique l'inégalité de Markov à Y et conclus.

20 La borne est-elle bonne ? ★★★

Soit X le nombre de « pile » en 20 lancers d'une pièce équilibrée : X suit la loi binomiale $B(20 ; 0,5)$.

- a. Donne $E(X)$ et $V(X)$.
- b. Majore $P(|X - 10| \geq 5)$ par Bienaymé-Tchebychev.
- c. Calcule la valeur exacte de cette probabilité, sachant que $C(20 ; k)$ vaut 1, 20, 190, 1140, 4845, 15504 pour $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, et que $2^{20} = 1\,048\,576$.
- d. Compare.

21 Précision exigée ★★★

Une mesure aléatoire X a un écart-type $\sigma = 2,4$. On répète la mesure n fois de façon indépendante et on note M_n la moyenne.

- Détermine n pour que $P(|M_n - E(X)| \geq 0,2) \leq 0,01$ soit garantie.
- Même question pour un écart de 0,1 au lieu de 0,2. Que remarques-tu ?

22 Estimer une proportion inconnue ★★★

On veut estimer une proportion inconnue p en observant la fréquence F_n d'un échantillon de taille n .

- Montre que, pour tout p de $[0 ; 1]$, $p(1 - p) \leq 0,25$.
- Détermine la taille n qui garantit $P(|F_n - p| \geq 0,02) \leq 0,05$ quelle que soit la valeur de p .

23 Lire un programme Python ★★★

On considère le programme suivant.

```
import random

def freq(n):
    c = 0
    for _ in range(n):
        if random.random() < 0.3:
            c = c + 1
    return c / n

print(freq(100))
print(freq(10000))
```

- Quelle expérience aléatoire ce programme simule-t-il ? Quel est le rôle de $\text{freq}(n)$?
- Vers quelle valeur les affichages semblent-ils tendre ? Quel théorème l'explique ?
- Avec $n = 10\,000$, majore $P(|\text{freq} - 0,3| \geq 0,02)$, sachant que la variance d'une variable de Bernoulli de paramètre 0,3 est 0,21.

24 Écart-type de la moyenne et taille minimale ★★★

On mesure la durée d'un trajet, de moyenne $\mu = 25$ minutes et d'écart-type $\sigma = 6$ minutes. On observe n trajets indépendants et on note M_n la durée moyenne.

- Donne l'espérance et l'écart-type de M_{36} .
- Majore $P(|M_{36} - 25| \geq 3)$.

c. Quelle valeur de n garantit $P(|M_n - 25| \geq 1) \leq 0,05$?