

Suites et raisonnement par récurrence

Contrôle de maths - Terminale

Durée conseillée : 45 minutes. Barème sur 20 points. Calculatrice interdite.

1 Arithmétique et géométrie / 3 pts

Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = -4$ et de raison 1,5, et (v_n) la suite géométrique de premier terme $v_0 = 200$ et de raison 0,9.

- Exprime u_n en fonction de n et calcule u_{10} .
- Exprime v_n en fonction de n et calcule v_6 (arrondi au centième).
- Donne, en justifiant, le sens de variation et la limite de chacune des deux suites.

2 Une récurrence / 4 pts

Soit (u_n) définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$.

- Calcule u_1 , u_2 , u_3 .
- Démontre par récurrence que $u_n = (n + 1)^2 + 2$ pour tout entier n .
- En déduire le sens de variation de (u_n) et sa limite.

3 Étude complète d'une suite / 4 pts

Soit (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$.

- Calcule u_1 et u_2 (arrondis au millièmè).
- Démontre par récurrence que $0 \leq u_n < 3$ pour tout n .
- Montre que $u_{n+1} - u_n = (3 - u_n)(1 + u_n) \div (\sqrt{2u_n + 3} + u_n)$ et en déduire que (u_n) est croissante.
- Démontre que (u_n) converge, puis détermine sa limite (on admet que la limite ℓ vérifie $\ell = \sqrt{2\ell + 3}$).

4 Majorée, minorée, croissante / 3 pts

Soit $w_n = 3n+2/n+1$ pour tout entier n .

- Vérifie que $w_n = 3 - 1/n+1$.
- Démontre que $2 \leq w_n < 3$ pour tout n .
- Démontre que (w_n) est strictement croissante.

d. Que peux-tu affirmer sur la convergence de (w_n) ? Vers quelle valeur ?

5 Un placement et un programme / 3 pts

On place 5 000 € à intérêts composés au taux annuel de 3 %. On note v_n le capital (en €) au bout de n années.

- Exprime v_n en fonction de n .
- Écris en Python une fonction `duree()` qui renvoie le plus petit nombre d'années au bout duquel le capital dépasse 8 000 €.
- Quelle valeur renvoie cette fonction ? Justifie par le calcul de deux valeurs de la suite.
- Pourquoi la boucle de ta fonction se termine-t-elle forcément ?

6 Bernoulli et limites / 3 pts

Le but est d'étudier le comportement de $1,5^n$ et de $(\frac{2}{3})^n$.

- Démontre par récurrence que, pour tout entier n , $1,5^n \geq 1 + 0,5n$.
- En déduire la limite de $1,5^n$ quand n tend vers $+\infty$.
- En déduire la limite de $(\frac{2}{3})^n$.